CÁLCULO VECTORIAL

CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

Empezamos con un tema que es continuación obligada del cálculo integral en varias variables y que al mismo tiempo ofrecerá herramientas para un conjunto grande de aplicaciones (una de ellas el electromagnetismo) que se apoyan sobre las ideas discutidas a continuación.

I. Campos Escalares y Vectoriales

Definición.

A) Un **campo escalar** es cualquier función $\emptyset: D_{\phi} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, o bien $\emptyset: D_{\phi} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$; es decir, una función que **asigna a vectores, escalares**.

B) Un **campo vectorial** es cualquier función $\vec{F}: D_F \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, o bien $\vec{F}: D_F \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, es decir, una función que asigna **vectores en vectores**.

Ejemplos de estos campos podrían ser: la temperatura en cada punto de un cuerpo (tridimensional); una función escalar, y la velocidad de un punto dentro de una placa circular giratoria sería ejemplo de un campo vectorial.

Notarán que ya hemos graficado campos escalares, pues sus gráficas corresponden precisamente a las superficies que dibujamos desde la parte inicial de este curso. Por otro lado, dibujar un campo vectorial no es sencillo, máxime si éste es tridimensional; por lo tanto, para hacerlo nos apoyaremos en Mathematica.

Actividad 1. Campos vectoriales bidimensionales y tridimensionales con Mathematica.

a) Accedan a Mathematica y dibujen el campo vectorial $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\vec{F}\,(x, y) = (y, x)$. Para conseguirlo utilicen el comando:

$$\text{campo} = \text{VectorPlot}[\{y, x\}, \{x, -2,2\}, \{y, -2,2\}, \text{VectorPoints} \rightarrow 7]$$

Analiza cómo se introdujo el campo en Mathematica, y cómo se visualiza.

b) Dibuja ahora el campo vectorial $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por:

$$\vec{F}\,(x, y, z) = (x, y, z)$$

$$\text{campo3D} = \text{VectorPlot3D}[\{x, y, z\}, \{x, -1,1\}, \{y, -1,1\}, \{z, -1,1\}, \text{VectorPoints} \rightarrow 5]$$

Actividad 2. Campos vectoriales conservativos.

a) Una placa circular plana se hace girar alrededor de su centro en sentido contrario a las manecillas del reloj a una velocidad de *c* radianes por minuto. Encuentren la velocidad del punto que está en *P* = (*x*, *y*) y expresen dicha velocidad en la forma:

$$\vec{F}\,(x, y) = \vec{F}(P) = (M(P), N(P))$$

Después dibujen el campo vectorial resultante usando Mathematica. Analicen la magnitud y dirección de los vectores $\vec{F}(P)$. ¿Qué pueden decir del ángulo entre los vectores P & $\vec{F}(P)$? Interpreten. Corresponde a lo esperado.

b) La ley de Newton de la gravitación universal expresa que la magnitud de la fuerza gravitacional ejercida por un objeto de masa *M* sobre un objeto de masa *m* es proporcional tanto a *M* como a *m* y es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. Expresen esta ley como un campo vectorial tridimensional de la forma:

$$\vec{F}\,(x,y,z) = \vec{F}(P) = (M(P), N(P), Q(P))$$

Utilicen Mathematica para dibujar el campo resultante. ¿Qué observan del campo de direcciones y las magnitudes? Corresponde a lo esperado.

Existen ciertas conexiones entre campos escalares y vectoriales. Tal vez una de las más importantes sea la que se refiere a los **campos vectoriales <u>conservativos</u>**, calificativo que apoyado en la física tomará su justificación después.

Definición. Un campo vectorial es **conservativo** si $\vec{F} = \nabla\emptyset$ para algún campo escalar $\emptyset$ (de hecho si hay uno, hay una infinidad; todos ellos distinguibles entre sí por una constante). Al campo $\emptyset$ se le llama **un potencial** del campo conservativo $\vec{F}$. En otras palabras, para que el campo vectorial $\vec{F}$ sea conservativo el campo debe ser el gradiente de algún campo escalar.

c) Determina y argumenta con toda claridad cuáles de los campos de esta actividad en los incisos a) y b) son conservativos.

Actividad 3. Campos vectoriales y trayectorias.
Algunos asuntos que discutiremos más adelante en el curso tendrán que ver con **trayectorias inmersas dentro de campos vectoriales**.

Definición. Una **función vectorial** es una función de la forma $\vec{r}: D_r \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, o bien $\vec{r}: D_r \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que **asigna vectores a valores escalares**. A la gráfica de una función de este tipo la llamaremos **trayectoria** (**traza** o **curva**) la cual requerirá, según el tipo de función, dos o tres dimensiones para ser dibujada.

El siguiente es un ejemplo; tecleen las instrucciones en Mathematica:

$$\text{curvaLissajous} = \text{ParametricPlot}[\{4 * \text{Sin}[4 * t + 2], 2 * \text{Sin}[6 * t + 3]\}, \{t, -5,5\}]$$

Para una curva en tres dimensiones requerirán el comando "ParametricPlot3D". Investiguen cómo usarlo en la ayuda de Mathematica. Ahora, adapten las instrucciones anteriores y realicen lo que se pide a continuación.

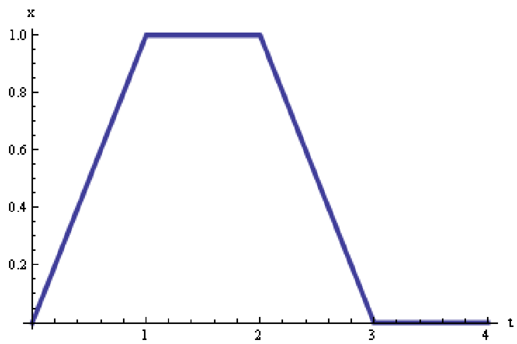
a) Usen Mathematica para dibujar las trayectorias de las siguientes funciones vectoriales.

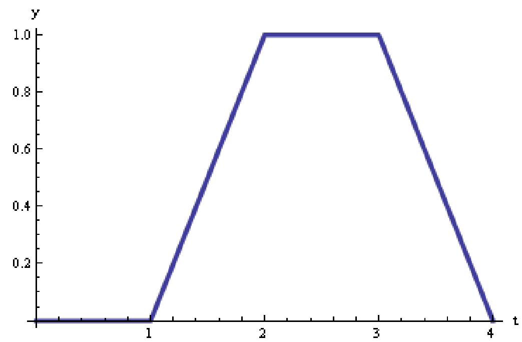
i) $\vec{r}(t) = cosh(t)\,\hat{\imath} + \ senh(t)\,\hat{\jmath}$

ii) $\vec{r}(t) = cos(t)\,\hat{\imath} + \ sen(t)\,\hat{\jmath} + t^2\hat{k}$

(**Observa la notación apoyada en los vectores unitarios canónicos**)

b) La traza de una función vectorial puede ser descrita por sus ecuaciones paramétricas. A partir de las gráficas de $x(t)$ & $y(t)$ dadas abajo, tracen la curva representada por la función vectorial $\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t))$.





c) Las curvas en general pueden ser más elaboradas de lo que podemos dibujar a mano, y muchas de ellas requerirán de un buen software. Entre estas curvas, una de las más famosas es la llamada curva de **Lissajous** que ya dimos como ejemplo. En general, esta curva tiene una ecuación vectorial de la forma $\overrightarrow{r(t)} = (\cos(at), sen(bt))$. Elaboren la gráfica para el caso *a* = 3, *b* = 5.

d) Revisen el comando "Manipulate" de Mathematica. Realicen el inciso anterior para el conjunto de curvas de Lissajous para los cuales ***a*** varía de 3 a 4 con saltos de 0.1 y ***b*** varía de 3 a 5 con saltos de 0.1. En este punto deberán concluir con una animación de este tipo de trayectorias.

e) La derivada de una función vectorial representa un vector tangente a la curva en el punto de contacto. Usen Mathematica para animar rectas tangentes sobre una curva. La idea dada en los comandos que aparecen abajo puede extenderse a tres dimensiones.

```
x[t_]=1+t;
y[t_]=2+t^2;
derx[t_]=D[x[t],t];
dery[t_]=D[y[t],t];
Manipulate[ParametricPlot[{{x[t],y[t]},{x[t0],y[t0]}+t*{derx[t0],dery[t0]}},{t,-
2,2},PlotRange→{-1,7}],{t0,-2,2,0.1}]
```

f) Se puede dibujar simultáneamente un campo vectorial y una trayectoria. Esta idea se vincula con aplicaciones muy importantes. Dibuja las dos trayectorias de esta actividad (incisos i) y ii) del inciso a)) dentro de los campos vectoriales de la actividad

2 a) y b), respectivamente. A continuación se les da un ejemplo adicional para adaptarlo a los requerimientos pedidos. Incorporen estas instrucciones en Mathematica.

$$\text{campo} = \text{VectorPlot}[\{x, -y\}, \{x, -2,2\}, \{y, 0,1\}]$$

$$\text{curva} = \text{ParametricPlot}[\{t, 1 - \frac{t\text{^}2}{t\text{^}2 + 1}\}, \{t, -4,4\}]$$

$$\text{Show}[\text{campo}, \text{curva}]$$