TIPO A

Nombre: _____

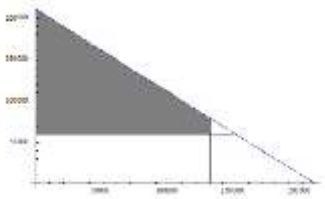
Matrícula: _____

Indicaciones:

- Este examen consta de 5 preguntas, cada una con un valor de 20 puntos.
- Cada ejercicio debe tener procedimiento **ordenado y completo** que justifique adecuadamente la respuesta dada.
- **Si falta el procedimiento** o éste no justifica la respuesta, **entonces el problema vale 0 puntos** aunque la respuesta sea correcta.
- **No se permite el uso de formularios.**

1. Pedro dispone de 210,000 dólares para invertir en bolsa. Le recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A, que rinden el 10% y las del tipo B, que rinden el 8%. Pedro decide invertir un máximo de 130,000 dólares en las del tipo A y como mínimo 60,000 dólares en las del tipo B. ¿Qué le recomendarías a Pedro sobre la distribución de su inversión para que obtenga el máximo interés anual?
(**Sugerencia:** Considera las variables "*x*" la cantidad que Pedro invierte en acciones de tipo A & "*y*" la cantidad que invierte en acciones de tipo B).
Evaluación: 5 puntos: función objetivo, 5 puntos establecimiento de las restricciones, 5 puntos para el dibujo de la región factible, 5 puntos para la solución y conclusión.

SOLUCIÓN:
La función objetivo es $G(x,y) = 0.1x + 0.08y$. Las restricciones están dadas por:
$$x \leq 130000; y \geq 60000; x + y \leq 210000$$
Al representar las restricciones anteriores, obtenemos la siguiente región factible.



Cuyos vértices son: V_1 = (0, 60 000), V_2 = (130 000, 60 000), V_3 = (130 000, 80 000) & V_4 = (0, 210 000). Al evaluar la función objetivo en éstos, hallamos:
$$G(V_1) = \$4{,}800.00;$$
$$G(V_2) = \$17{,}800.00;$$
$$G(V_3) = \$19{,}400.00,$$
$$G(V_4) = \$16{,}800.00$$
Concluimos que la mejor decisión se logra invirtiendo 130 mil dólares en acciones tipo A y 80 mil dólares en acciones tipo B. Esto generaría intereses por 19, 400 dólares.

2. Sea la función $u(x,y) = 6.4x^{0.35}y^{0.75}$ & x_0, y_0 los niveles actuales de los factores de producción. Si x_0 aumenta un 20%, ¿cuánto debe aumentar y_0 para que la función de utilidad se duplique con respecto a su valor actual?

SOLUCIÓN:

$2[6.4{x_0}^{0.35}{y_0}^{0.75}] = 6.4(1.2x_0)^{0.35}(ky_0)^{0.75}$;

Al aplicar leyes de exponentes y simplificar, obtenemos:

$$2 = (1.2)^{0.35}(k)^{0.75}$$

Despejamos ahora a "k":

$$k^{0.75} = \frac{2}{1.2^{0.35}} = 1.87636$$

$$0.75lnk = \ln(1.87636)$$

$$lnk = 0.839112 \rightarrow k = e^{0.839112} = 2.3143$$

Por lo tanto el factor y_0 debe incrementarse en un 131.43%.

3. Si $f(x,y,z) = xe^{yz} + \left(\frac{x}{y}\right)^z$, determina $f_{\ x\,z}$.

Evaluación: 10 puntos por cada derivada, la segunda dependerá de que la primera sea correcta.

SOLUCIÓN:

La derivación es directa, hallamos:

$$f_x = e^{yz} + z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\left(\frac{1}{y}\right)$$

Para la siguiente derivada (sucesiva):

$$f_{xz} = \frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{yz} + z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\left(\frac{1}{y}\right)\right) = ye^{yz} + \frac{1}{y}\left[z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1} ln\left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\right]$$

Al factorizar:

$$f_{xz} = ye^{yz} + \frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\left[z\, ln\left(\frac{x}{y}\right) + 1\right]$$

4. Si $z = f(x,y)$ se define implícitamente por medio de la ecuación:

$$z\, ln(xy) + x\, z^3 = y + yz$$

Determina z_x.

SOLUCIÓN:

$z\left(\frac{y}{xy}\right) + z_x\, ln(xy) + 3xz^2z_x + z^3 = yz_x$;

$\frac{z}{x} + z_x\, ln(xy) + 3xz^2z_x + z^3 = yz_x$;

Al multiplicar por "x":

$z + x\, z_x\, ln(xy) + 3x^2z^2z_x + x\, z^3 = x\, y\, z_x$;

O bien:

$$z + x\, z^3 = z_x\,(xy - x\, ln(xy) - 3x^2z^2);$$

Por lo tanto:

$$z_x = \frac{z + x\,z^3}{xy - x\,ln(xy) - 3x^2z^2}$$

5. Usa la tabla de valores de $z = f(x, y)$ para calcular los valores de $f_x(4.7,4)$ & $f_y(4.7, 4)$. Calcula después la derivada direccional de f en (4.7, 4) en la dirección del vector $\vec{A} = (3,4)$.

x\y	3.9	4	4.2
4.5	**15.5**	**15.2**	**15.3**
4.7	**16.1**	**15.5**	**14.9**
4.8	**18.0**	**20.4**	**22.1**

Evaluación: 5 puntos por cada derivada parcial, 10 puntos por la derivada direccional.

SOLUCIÓN:

Hacemos aproximaciones de las derivadas parciales:

$$f_x(4.7,4) \approx \frac{f(4.8,4) - f(4.7,4)}{4.8 - 4.7} = \frac{20.4 - 15.5}{0.1} = 49$$

$$f_y(4.7,4) \approx \frac{f(4.7,3.9) - f(4.7,4)}{3.9 - 4} = \frac{16.1 - 15.5}{-0.1} = -6$$

En cuanto al vector unitario:

$$\hat{u} = \frac{(3,4)}{5} = (0.6,0.8)$$

Con estos cálculos preliminares, obtenemos:

$$D_{\hat{u}}\, f\ (4.7,4) = \nabla f(4.7,4).\hat{u} = (49, -6).(0.6,0.8) = 24.6$$