TIPO A

Nombre: _____

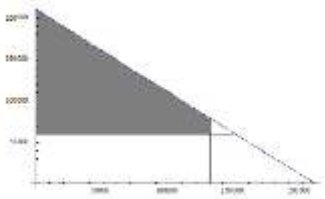
Matrícula: _____

Indicaciones:

- Este examen consta de 5 preguntas, cada una con un valor de 20 puntos.
- Cada ejercicio debe tener procedimiento **ordenado y completo** que justifique adecuadamente la respuesta dada.
- **Si falta el procedimiento** o éste no justifica la respuesta, **entonces el problema vale 0 puntos** aunque la respuesta sea correcta.
- **No se permite el uso de formularios.**

1. Pedro dispone de 210,000 dólares para invertir en bolsa. Le recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A, que rinden el 10% y las del tipo B, que rinden el 8%. Pedro decide invertir un máximo de 130,000 dólares en las del tipo A y como mínimo 60,000 dólares en las del tipo B. ¿Qué le recomendarías a Pedro sobre la distribución de su inversión para que obtenga el máximo interés anual?
(**Sugerencia:** Considera las variables "*x*" la cantidad que Pedro invierte en acciones de tipo A & "*y*" la cantidad que invierte en acciones de tipo B).
Evaluación: 5 puntos: función objetivo, 5 puntos establecimiento de las restricciones, 5 puntos para el dibujo de la región factible, 5 puntos para la solución y conclusión.

SOLUCIÓN:
La función objetivo es $G(x,y) = 0.1x + 0.08y$. Las restricciones están dadas por:
$$x \leq 130000; y \geq 60000; x + y \leq 210000$$
Al representar las restricciones anteriores, obtenemos la siguiente región factible.



Cuyos vértices son: V_1 = (0, 60 000), V_2 = (130 000, 60 000), V_3 = (130 000, 80 000) & V_4 = (0, 210 000). Al evaluar la función objetivo en éstos, hallamos:
$$G(V_1) = \$4{,}800.00;$$
$$G(V_2) = \$17{,}800.00;$$
$$G(V_3) = \$19{,}400.00,$$
$$G(V_4) = \$16{,}800.00$$
Concluimos que la mejor decisión se logra invirtiendo 130 mil dólares en acciones tipo A y 80 mil dólares en acciones tipo B. Esto generaría intereses por 19, 400 dólares.

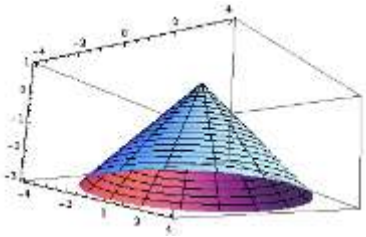
2. Elabora la gráfica de la función $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$. Determina su dominio e imagen. Tu gráfica debe incluir el análisis de las trazas y las curvas de nivel.
Evaluación: 5 puntos, trazas; 5 puntos, curvas de nivel; 5 puntos, gráfica, 5 puntos, dominio e imagen.
SOLUCIÓN:
Las trazas quedan:

$$xy: z = 0 \rightarrow 0 = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$
$$xz: y = 0 \rightarrow z = 1 - \sqrt{x^2} = 1 - |x|$$
$$yz: x = 0 \rightarrow z = 1 - \sqrt{y^2} = 1 - |y|$$

Para las curvas de nivel, tomamos $z = N, N$ constante. Tenemos:

$$N = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow x^2 + y^2 = (1 - N)^2$$

Por lo tanto, las trazas se refieren a una circunferencia con centro en el origen y radio 1, dos gráficas con el aspecto de un valor absoluto invertido y trasladado cada uno de ellos 1 unidad hacia z positiva, respectivamente. Las curvas de nivel son circunferencias con centro en el origen y de radio $r = 1 - N$, por lo que esto es válido a condición de que $N \leq 1$. Esto dice que la gráfica se extiende hacia abajo del eje z. La gráfica es un cono invertido como el que se muestra en la siguiente figura:



El dominio de la función es $D = \mathbb{R}^2$ y la imagen es $I = (-\infty, 1]$.

3. Si $f(x, y, z) = xe^{yz} + \left(\frac{x}{y}\right)^z$, determina $f_{\ x\,z}$.

Evaluación: 10 puntos por cada derivada, la segunda dependerá de que la primera sea correcta.

SOLUCIÓN:

La derivación es directa, hallamos:

$$f_x = e^{yz} + z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\left(\frac{1}{y}\right)$$

Para la siguiente derivada (sucesiva):

$$f_{xz} = \frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{yz} + z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\left(\frac{1}{y}\right)\right) = ye^{yz} + \frac{1}{y}\left[z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1} ln\left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\right]$$

Al factorizar:

$$f_{xz} = ye^{yz} + \frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\left[z\, ln\left(\frac{x}{y}\right) + 1\right]$$

4. Si $z = f(x, y)$ se define implícitamente por medio de la ecuación:

$$z\, ln(xy) + x\, z^3 = y + yz$$

Determina z_x.

SOLUCIÓN:

$z\left(\frac{y}{xy}\right) + z_x\, ln(xy) + 3xz^2 z_x + z^3 = yz_x$;

$\frac{z}{x} + z_x\, ln(xy) + 3xz^2 z_x + z^3 = yz_x;$

Al multiplicar por "x":

$z + x\, z_x\, ln(xy) + 3x^2 z^2 z_x + x\, z^3 = x\, y\, z_x;$

O bien:

$$z + x\, z^3 = z_x\, (xy - x\, ln(xy) - 3x^2 z^2);$$

Por lo tanto:

$$z_x = \frac{z + x\, z^3}{xy - x\, ln(xy) - 3x^2 z^2}$$

5. Usa la tabla de valores de $z = f(x, y)$ para calcular los valores de $f_x(4.7,4)$ & $f_y(4.7, 4)$. Calcula después la derivada direccional de f en (4.7, 4) en la dirección del vector $\vec{A} = (3,4)$.

x\y	3.9	4	4.2
4.5	**15.5**	**15.2**	**15.3**
4.7	**16.1**	**15.5**	**14.9**
4.8	**18.0**	**20.4**	**22.1**

Evaluación: 5 puntos por cada derivada parcial, 10 puntos por la derivada direccional.

SOLUCIÓN:

Hacemos aproximaciones de las derivadas parciales:

$$f_x(4.7,4) \approx \frac{f(4.8,4) - f(4.7,4)}{4.8 - 4.7} = \frac{20.4 - 15.5}{0.1} = 49$$

$$f_y(4.7,4) \approx \frac{f(4.7,3.9) - f(4.7,4)}{3.9 - 4} = \frac{16.1 - 15.5}{-0.1} = -6$$

En cuanto al vector unitario:

$$\hat{u} = \frac{(3,4)}{5} = (0.6,0.8)$$

Con estos cálculos preliminares, obtenemos:

$$D_{\hat{u}}\, f\, (4.7,4) = \nabla f(4.7,4).\hat{u} = (49, -6).(0.6,0.8) = 24.6$$