TIPO A

Nombre: _____

Matrícula: _____

Indicaciones:

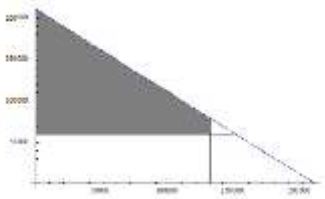
- Este examen consta de 5 preguntas, cada una con un valor de 20 puntos.
- Cada ejercicio debe tener procedimiento **ordenado y completo** que justifique adecuadamente la respuesta dada.
- **Si falta el procedimiento** o éste no justifica la respuesta, **entonces el problema vale 0 puntos** aunque la respuesta sea correcta.
- **No se permite el uso de formularios.**

1. Pedro dispone de 210,000 dólares para invertir en bolsa. Le recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A, que rinden el 10% y las del tipo B, que rinden el 8%. Pedro decide invertir un máximo de 130,000 dólares en las del tipo A y como mínimo 60,000 dólares en las del tipo B. ¿Qué le recomendarías a Pedro sobre la distribución de su inversión para que obtenga el máximo interés anual?
(**Sugerencia:** Considera las variables "*x*" la cantidad que Pedro invierte en acciones de tipo A & "*y*" la cantidad que invierte en acciones de tipo B).
Evaluación: 5 puntos: función objetivo, 5 puntos establecimiento de las restricciones, 5 puntos para el dibujo de la región factible, 5 puntos para la solución y conclusión.

SOLUCIÓN:
La función objetivo es $G(x, y) = 0.1x + 0.08y$. Las restricciones están dadas por:

$$x \leq 130000; y \geq 60000; x + y \leq 210000$$

Al representar las restricciones anteriores, obtenemos la siguiente región factible.



Cuyos vértices son: V_1 = (0, 60 000), V_2 = (130 000, 60 000), V_3 = (130 000, 80 000) & V_4 = (0, 210 000). Al evaluar la función objetivo en éstos, hallamos:

$$G(V_1) = \$4{,}800.00;$$
$$G(V_2) = \$17{,}800.00;$$
$$G(V_3) = \$19{,}400.00,$$
$$G(V_4) = \$16{,}800.00$$

Concluimos que la mejor decisión se logra invirtiendo 130 mil dólares en acciones tipo A y 80 mil dólares en acciones tipo B. Esto generaría intereses por 19, 400 dólares.

2. Elabora la gráfica de la función $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$. Determina su dominio e imagen. Tu gráfica debe incluir el análisis de las trazas y las curvas de nivel.
Evaluación: 5 puntos, trazas; 5 puntos, curvas de nivel; 5 puntos, gráfica, 5 puntos, dominio e imagen.

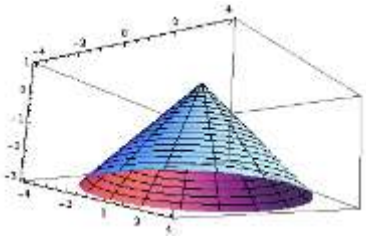
SOLUCIÓN:
Las trazas quedan:

$$xy: z = 0 \rightarrow 0 = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$
$$xz: y = 0 \rightarrow z = 1 - \sqrt{x^2} = 1 - |x|$$
$$yz: x = 0 \rightarrow z = 1 - \sqrt{y^2} = 1 - |y|$$

Para las curvas de nivel, tomamos $z = N, N$ constante. Tenemos:

$$N = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow x^2 + y^2 = (1 - N)^2$$

Por lo tanto, las trazas se refieren a una circunferencia con centro en el origen y radio 1, dos gráficas con el aspecto de un valor absoluto invertido y trasladado cada uno de ellos 1 unidad hacia z positiva, respectivamente. Las curvas de nivel son circunferencias con centro en el origen y de radio $r = 1 - N$, por lo que esto es válido a condición de que $N \leq 1$. Esto dice que la gráfica se extiende hacia abajo del eje z. La gráfica es un cono invertido como el que se muestra en la siguiente figura:



El dominio de la función es $D = \mathbb{R}^2$ y la imagen es $I = (-\infty, 1]$.

3. Si $f(x, y, z) = xe^{yz} + \left(\frac{x}{y}\right)^z$, determina f_{xz}.
Evaluación: 10 puntos por cada derivada, la segunda dependerá de que la primera sea correcta.

SOLUCIÓN:
La derivación es directa, hallamos:

$$f_x = e^{yz} + z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\left(\frac{1}{y}\right)$$

Para la siguiente derivada (sucesiva):

$$f_{xz} = \frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{yz} + z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\left(\frac{1}{y}\right)\right) = ye^{yz} + \frac{1}{y}\left[z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1} ln\left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\right]$$

Al factorizar:

$$f_{xz} = ye^{yz} + \frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\left[z\, ln\left(\frac{x}{y}\right) + 1\right]$$

4. Si $z = f(x, y)$ se define implícitamente por medio de la ecuación:

$$z\, ln(xy) + y\, z^3 = y + yz$$

Determina z_x.

SOLUCIÓN:

$\frac{\partial}{\partial x}[z\, ln(xy) + y\, z^3] = \frac{\partial}{\partial x}[y + yz]$;

$z\left(\frac{y}{xy}\right) + z_x \ln(xy) + 3\,\mathrm{y}\, z^2\, z_x = \mathrm{y}\, z_x$;

Multiplicamos por "*x*" ambos lados de la última ecuación y simplificamos la variable "*y*" del numerador y denominador en el primer paréntesis para encontrar:

$$z + x\, z_x\, ln(xy) + 3x\, y\, z^2\, z_x = x\, y\, z_x$$

Al despejar z_x obtenemos:

$$z_x = \frac{z}{x\, y - x\, ln(xy) - 3\, x\, y\, z^2}$$

5. Usa la tabla de valores de $z = f(x, y)$ para calcular los valores de $f_x(4.7, 4)$, $f_x(4.7, 3.9)$ & $f_{x\,y}(4.7,4)$.

x\y	3.9	4.0	4.2
4.5	**15.5**	**15.2**	**15.3**
4.7	**16.1**	**15.5**	**14.9**
4.8	**18.0**	**20.4**	**22.1**

Evaluación: 5 puntos por cada derivada de primer orden, 10 puntos por la de segundo orden.

SOLUCIÓN:

Hacemos aproximación numérica por medio de la tabla que aparece arriba. Obtenemos:

$$f_x(4.7,4) \approx \frac{f(4.8,4) - f(4.7,4)}{4.8 - 4.7} = \frac{20.4 - 15.5}{0.1} = 49;$$

$$f_x(4.7,3.9) \approx \frac{f(4.8,3.9) - f(4.7,3.9)}{4.8 - 4.7} = \frac{18 - 16.1}{0.1} = 19;$$

Finalmente:

$$f_{xy}(4.7,4) \approx \frac{f_x(4.7,3.9) - f_x(4.7,4)}{3.9 - 4} = \frac{19 - 49}{-0.1} = 300$$