TIPO B

Nombre: _____

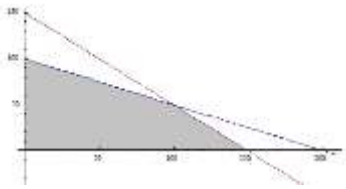
Matrícula: _____

Indicaciones:

- Este examen consta de 5 preguntas, cada una con un valor de 20 puntos.
- Cada ejercicio debe tener procedimiento **ordenado y completo** que justifique adecuadamente la respuesta dada.
- **Si falta el procedimiento** o éste no justifica la respuesta, **entonces el problema vale 0 puntos** aunque la respuesta sea correcta.
- No olvides identificar el ejercicio e inciso que estás resolviendo.
- **No se permite el uso de formularios ni de calculadoras.**

1. En una pastelería se hacen dos tipos de tartas: Vienesa y Real. Cada tarta Vienesa necesita un cuarto de relleno y produce una ganancia de 25 pesos, mientras que una tarta Real necesita medio kilogramo de relleno y produce 40 pesos de ganancia. En la pastelería se pueden hacer diariamente hasta 150 tartas y 50 kilogramos de relleno. ¿Cuántas tartas Vienesas y cuantas Reales deben vender al día para que la ganancia sea máxima?
(**Sugerencia**: Sea "x" el número de tartas Vienesa, & "y" el número de tartas Real)
Evaluación: 5 puntos: función objetivo, 5 puntos establecimiento de las restricciones, 5 puntos para el dibujo de la región factible, 5 puntos para la solución y conclusión.

SOLUCIÓN:
La función objetivo es $G(x,y) = 25x + 40y$. De acuerdo a las indicaciones del problema, las restricciones son $0.25x + 0.5y \leq 50$ & $x + y \leq 150$. Al dibujar estas restricciones, se determina la región factible que aparece en la siguiente figura:



Los vértices a considerar de esta región son $V_1 = (0,0)$; $V_2 = (150,0)$; el de la intersección de las rectas: $V_3 = (100,50)$ & $V_4 = (0,100)$. La evaluación de la función objetivo en estos vértices genera los siguientes valores:

$$G(V_1) = 0;\ G(V_2) = \$3750;\ G(V_3) = \$4500;\ G(V_4) = \$4000$$

De aquí se desprende que el esquema más conveniente para la pastelería es hacer 100 tartas Vienesas y 50 tartas tipo Real. Bajo estas circunstancias, las ganancias ascenderían a \$4500.00.

2. Elabora la gráfica de la función $z = x^2 + y^2 - 1$. Determina su dominio e imagen. Tu gráfica debe incluir el análisis de las trazas y las curvas de nivel.

Evaluación: 5 puntos, trazas; 5 puntos, curvas de nivel; 5 puntos, gráfica, 5 puntos, dominio e imagen.

SOLUCIÓN:

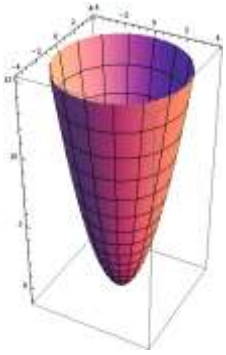
Las trazas quedan:

$$xy: z = 0 \rightarrow 0 = x^2 + y^2 - 1 \leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$
$$xz: y = 0 \rightarrow z = x^2 - 1 \rightarrow z + 1 = x^2$$
$$yz: x = 0 \rightarrow z = y^2 - 1 \rightarrow z + 1 = y^2$$

Para las curvas de nivel, tomamos $z = N, N$ constante. Tenemos:

$$N = x^2 + y^2 - 1 \rightarrow x^2 + y^2 = N + 1$$

Por lo tanto, las trazas se refieren a una circunferencia con centro en el origen y radio 1, dos parábolas trasladadas cada una de ellas 1 unidad en z negativa. Las curvas de nivel son circunferencias con centro en el origen y de radio $r = \sqrt{N+1}$, por lo que esto es válido a condición de que $N \geq -1$. Esto dice que la gráfica se extiende hacia arriba del eje z iniciando en -1. La gráfica es un paraboloide como el que se muestra en la siguiente figura:



El dominio de la función es $D = \mathbb{R}^2$ y la imagen es $I = [-1, +\infty)$.

3. Si $f(x, y, z) = y\, z^4\, senx + \frac{z}{x + 2\,y}$, determina la derivada direccional de f en $P_0 = (1,1,2)$ en la dirección del vector $\vec{A} = (-1,2,-2)$.

Importante: Asegúrate que tu calculadora está en modo RADIANES.

SOLUCIÓN:

Calculamos primero el vector unitario requerido:

$$\hat{u} = \frac{(-1,2,-2)}{\sqrt{1+4+4}} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Las derivadas parciales para construir el vector gradiente en el punto indicado quedan:

$$f_x(1,1,2) = yz^4 cosx - \frac{z}{(x+2y)^2}\bigg|_{(1,1,2)} = 8.423$$
$$f_y(1,1,2) = z^4 sen\, x - \frac{2\,z}{(x+2y)^2}\bigg|_{(1,1,2)} = 13.02$$

$$f_z(1,1,2) = 4\,y\,z^3\,senx + \left.\frac{1}{x+2y}\right|_{(1,1,2)} = 27.26$$

Entonces:

$$D_{\hat{u}}\,f\,(1,1,2) = \nabla f(1,1,2).\hat{u} = (8.423,13.02,27.26).\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right) = -12.301$$

4. Si $z = f(x,y)$ se define implícitamente por medio de la ecuación:

$$y\,e^{\,x\,z} + z^3 = y^2 z + xz$$

Determina z_y.

SOLUCIÓN:

Se trata de una derivada parcial implícita para la cual "*z*" & "*y*" se considerarán variables, la "*x*" constante. Al derivar bajo estas condiciones hallamos:

$$x\,y\,e^{x\,z}\,z_y + e^{x\,z} + 3\,z^{\,2}\,z_y = y^2\,z_y + 2\,y\,z + x\,z_y$$

Al pasar todos los términos con z_y y factorizar, encontramos:

$$e^{x\,z} - 2\,y\,z = z_y(y^2 + x - xy\,e^{x\,z} - 3\,z^2)$$

Despejamos para obtener:

$$z_y = \frac{e^{x\,z} - 2\,y\,z}{y^2 + x - xy\,e^{x\,z} - 3\,z^2}$$

5. Sea $z = \frac{x+y^2}{x^2+y}$, $x = ln(r+s)$ & $y = 4\,r\,s$. Usa regla de la cadena para calcular el valor numérico de $\frac{\partial\,z}{\partial\,r}$ si $r = \frac{1}{2}$ & $s = \frac{1}{2}$.

SOLUCIÓN:

Primero notamos que $r = \frac{1}{2}$ & $s = \frac{1}{2} \rightarrow x = \ln(1) = 0; y = 1$. Al realizar el diagrama de árbol para la regla de la cadena de este caso, obtenemos la fórmula:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

Los cálculos de las anteriores derivadas parciales son:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left.\frac{(x^2+y) - (x+y^2)(2x)}{(x^2+y)^2}\right|_{(0,1)} = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left.\frac{(x^2+y)(2y) - (x+y^2)}{(x^2+y)^2}\right|_{(0,1)} = 1$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{1}{r+s} = 1$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = 4s = 2$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) = (1)(1) + 1(2) = 3$$