Nombre: _____

Matrícula: _____

Indicaciones:

- Este quiz consta de 5 preguntas, cada una con un valor de 20 puntos.
- Cada ejercicio debe tener procedimiento **ordenado y completo** que justifique adecuadamente la respuesta dada.
- **Si falta el procedimiento** o éste no justifica la respuesta, **entonces el problema vale 0 puntos** aunque la respuesta sea correcta.
- No olvides identificar el ejercicio e inciso que estás resolviendo.
- **No se permite el uso de formularios ni de calculadoras.**
- Cualquier intento de fraude amerita **DA**.

1. Una agencia de viajes prepara una excursión para 400 turistas. La empresa cuenta con 8 autobuses de 40 plazas y 10 autobuses de 50 plazas, pero sólo dispone de 9 conductores. El costo para la agencia de un autobús grande es de 22 mil pesos y el de uno pequeño 18 mil pesos. Calcula cuántos autobuses de cada tipo debe proporcionar la agencia para que la excursión le resulte lo más económica (a la agencia).

SOLUCIÓN:

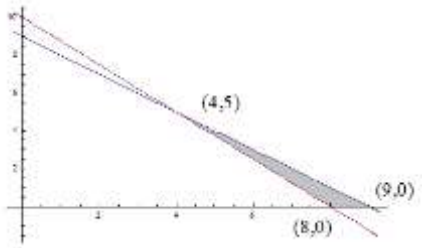
La función objetivo es en este caso, el costo total (para la agencia) de la excursión. Así que: $c(x, y) = 22x + 18y$ (en miles de pesos) es la función de utilidad, donde c, x, y representan las variables de costo, del número de autobuses de 50 y 40 plazas, respectivamente.

En cuanto a las restricciones:

a) Disponemos sólo de 9 conductores, por lo tanto, el número de autobuses en circulación o alquiler cumple: $x + y \leq 9$.

b) Debemos cubrir una demanda para 400 turistas, por lo tanto considerando el número de plazas: $50x + 40y \geq 400$.

Al dibujar la región factible, determinamos los vértices que aparecen en ésta:



Evaluamos ahora la función objetivo en **TODOS** los vértices de la región, hallamos:

$$c(8,0) = 176; c(4,5) = 178; c(9,0) = 198$$

Todas las cantidades anteriores en miles de pesos. Luego, al comparar los resultados, concluimos que **lo más conveniente para la agencia es cubrir su requisición con 8 autobuses de 50 plazas**.

2. Elabora la gráfica de la función $z = 4 - x^2 - y^2$. Determina su dominio e imagen. Tu gráfica debe incluir el análisis de las trazas y las curvas de nivel.

SOLUCIÓN:

Esta expresión representa una FUNCIÓN, cuyo **dominio es** el conjunto $\mathbb{R}^2$. Las trazas y descripción de las mismas queda como sigue:

A) **Trazas**:

a) Traza $xy; z = 0: 0 = 4 - x^2 - y^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 4$, una circunferencia con centro en el origen y radio igual a 2.

b) Traza $xz; y = 0: z = 4 - x^2$, una parábola que abre hacia abajo y tiene su vértice en $x = 0; z = 4$.

c) Traza $yz; x = 0: z = 4 - y^2$, una parábola que abre hacia abajo y tiene su vértice en $y = 0; z = 4$.

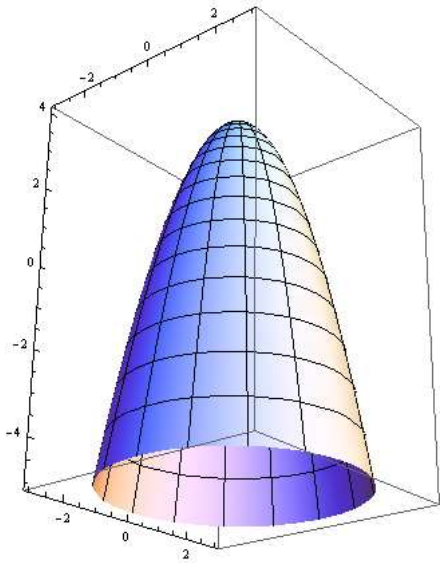
B) **Curvas de nivel**:

Hacemos $z = N$, donde N es constante. Obtenemos:

$$N = 4 - x^2 - y^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 4 - N$$

Es decir, el mapa de contorno consiste de circunferencias concéntricas, con centro en el origen, y radio $r = \sqrt{4 - N}$; lo que da evidencia de que el valor más alto que puede tomar N es 4. Si $N = 4$, se trata de un punto; si N toma valores negativos cada vez mayores, el radio aumenta; razón por la cual se entiende que en la medida que "cortamos" más abajo, en la parte negativa del eje "z", el radio de la circunferencia aumenta. **La imagen** de la función es $I_z = (-\infty, 4]$.

Considerando las descripciones anteriores, la gráfica queda (su perspectiva, "hecha a mano" es sin la perspectiva con la que aquí se le muestra):



3. Si $f(x,y,z) = z\, ln(x^{\,2}\, y\, cos\, z)$, determina $f_{\,x\,z}$.

SOLUCIÓN:
Para calcular f_x, derivamos con las reglas habituales de derivación considerando que tanto "y" como "z" son constantes. Tenemos:

$$f_x = z\left(\frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2 ycosz)}{x^2 ycosz}\right) = z\left(\frac{2xycosz}{x^2 ycosz}\right) = \frac{2z}{x}$$

Ahora, en una siguiente etapa, calculamos la derivada con respecto a "z", considerando que "x" es constante. Obtenemos:

$$f_{xz} = \frac{\partial}{\partial z} f_x = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2z}{x}\right) = \frac{2}{x}$$

4. Si $z = f(x,y)$ se define implícitamente por medio de la ecuación:

$$ze^{xy} + z^3 = xy + yz$$

Determina z_x.

SOLUCIÓN:
Este ejercicio trata con el tema de derivación parcial implícita. Entendamos entonces que "z" (variable dependiente) es constante para cualquiera que fuera nuestro cálculo. Como deseamos z_x, la variable "y" (independiente), la consideraremos constante. Entonces:

$$\frac{\partial}{\partial x}(ze^{xy} + z^3) = \frac{\partial}{\partial x}(xy + yz);$$

$$yze^{xy} + z_x\, e^{xy} \; + 3\, z^2\, z_x = \mathrm{y} + \mathrm{y}\, z_x;$$

$$z_x(e^{xy} + 3\, z^2 - y) = y - y\, z\, e^{\,xy}$$

Por lo tanto:

$$z_x = \frac{y - y\, z\, e^{\,xy}}{e^{xy} + 3\, z^2 - y}$$

5. Usa la tabla de valores de $z = f(x, y)$ para calcular los valores de $f_x(3,2)$ & $f_y(3.5, 2)$.

x\y	1.9	2.0	2.2
2.8	**12.5**	**10.2**	**9.3**
3.0	**18.1**	**17.5**	**15.9**
3.5	**20.0**	**22.4**	**26.1**

SOLUCIÓN:

Hacemos uso del enfoque numérico de cálculo para derivación parcial, obtenemos:

$$f_x(3,2) \approx \frac{f(2.8,2) - f(3,2)}{2.8 - 3} = \frac{10.2 - 17.5}{-0.2} = 36.5$$

De manera similar:

$$f_y(3.5,2) \approx \frac{f(3.5,1.9) - f(3.5,2)}{1.9 - 2} = \frac{20.0 - 22.4}{-0.1} = 24$$