Cálculo de Extremos Relativos sin Restricciones

Problema. Determina la menor distancia existente entre el cono con ecuación z =$\sqrt{x^2+y^2}$ y el punto (1,2,2).

Solución. Sea (x,y,z) un punto sobre el cono. Su distancia al punto (1,2,2) es d = $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2}$. Es habitual para facilitar los cálculos analíticos considerar como función objetivo a la distancia al cuadrado (lo que simplifica los cálculos por la ausencia de la raíz). Entonces la función objetivo a considerar sería F(x,y,z) = $d^2 = (x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2$. Ahora bien, como el punto (x,y,z) pertenece al cono se cumple la ecuación z = $\sqrt{x^2+y^2}$. Al sustituir esta relación en la función F, reducimos el número de variables, de tres a dos. De esta manera la función a considerar está dada por f(x,y) = $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2 = (x-1)^2+(y-2)^2+\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2$.

Aplicamos ahora la teoría, determinamos los puntos críticos de la función. Introducimos la función en *Mathematica,* derivamos parcialmente.

$$\mathtt{f[x\_,\ y\_] = (x-1)^2 + (y-2)^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2} - 2\right)^2}$$

```
fx = D[f[x, y], x] // Simplify
fy = D[f[x, y], y] // Simplify
```

$$(-1+x)^2 + (-2+y)^2 + \left(-2+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$$

$$-2 + x\left(4 - \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$-4 + y\left(4 - \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Resolvemos el sistema de derivadas parciales igualadas con cero. Cabe señalar que resolver el sistema analíticamente no es fácil.

```
Solve[{fx == 0, fy == 0}, {x, y}]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{1}{10}\left(5+2\sqrt{5}\right),\ y \to \frac{1}{5}\left(5+2\sqrt{5}\right)\right\}\right\}$$

Por lo tanto, nuestro punto crítico está formado por:

```
x0 = 1/10 (5 + 2 Sqrt[5])
y0 = 1/5 (5 + 2 Sqrt[5])
```

$$\frac{1}{10}\left(5+2\sqrt{5}\right)$$

$$\frac{1}{5}\left(5+2\sqrt{5}\right)$$

Ahora tenemos que valorar si este punto crítico corresponde a un máximo, mínimo o punto silla. Calculamos el discriminante de la función (una expresión bastante desagradable).

```
Dis[x_, y_] = D[f[x, y], {x, 2}] * D[f[x, y], {y, 2}] - (D[fx, y])^2 // Simplify
```

$$\frac{16\left(x^2+y^2-\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}$$

También tendremos "a la mano", la doble derivada de la función con respecto a x.

```
fxx[x_, y_] = D[f[x, y], {x, 2}] // Simplify
```

$$\frac{4\left(x^2\sqrt{x^2+y^2}+y^2\left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

Aplicamos el criterio del discriminante para la determinación de nuestra conclusión. Tenemos:

```
N[Dis[x0, y0]]
N[fxx[x0, y0]]
```

```
8.44582

2.48916
```

Como ambos resultados son positivos, podemos concluir que el punto crítico corresponde a un mínimo para la función. De esta manera, la distancia mínima es:

```
d = Sqrt[f[x0, y0]]
```

$$\sqrt{\left(\left(-1+\frac{1}{10}\left(5+2\sqrt{5}\right)\right)^2+\left(-2+\frac{1}{5}\left(5+2\sqrt{5}\right)\right)^2+\left(-2+\frac{5+2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)^2\right)}$$

O bien:

```
N[d]
```

```
0.166925
```

Las coordenadas x, y & z del punto sobre el cono más cercano a (1,2,2) son:

```
N[x0]
N[y0]
```
$$N\left[\sqrt{x0^2 + y0^2}\right]$$

```
0.947214

1.89443

2.11803
```