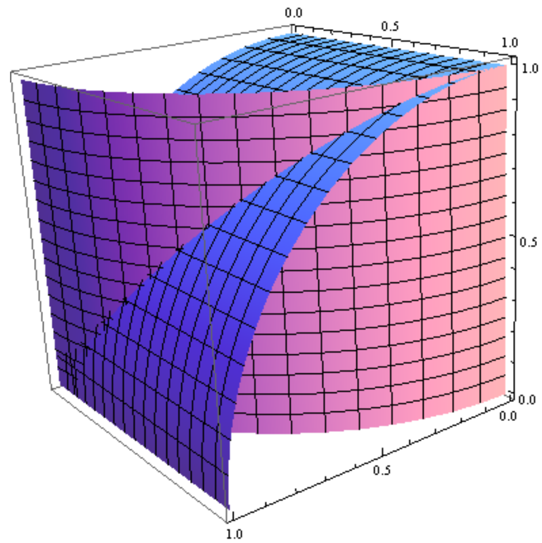
INTEGRAL MÚLTIPLE

Así como la integral definida de una variable ha sido importante en el cálculo de diversas cantidades físicas, geométricas y de la ingeniería, también es cierto que la integral múltiple será de gran utilidad en otras tantas aplicaciones donde se requiere un mayor número de dimensiones. Nos proponemos iniciar con un enfoque geométrico para consolidar algunas ideas muy valiosas, después iremos mencionando varias aplicaciones. Lo primero consiste en saber cómo calcular una integral doble. Lo haremos a través de las llamadas **INTEGRALES ITERADAS**, base de un resultado atribuido a un matemático italiano Guido **Fubini**.



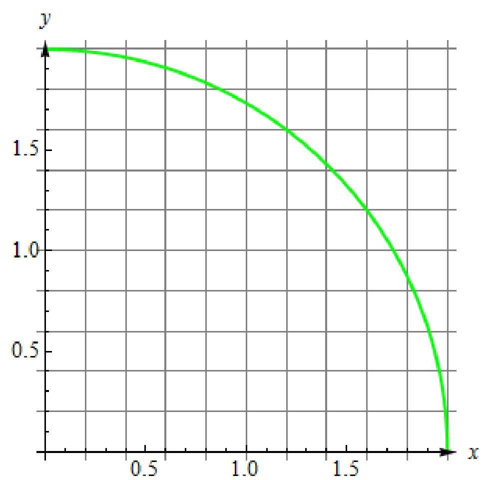
EL PROBLEMA:

Consiste en determinar el volumen del sólido contenido por la intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = 4$ & $x^2 + z^2 = 4$.

TU TRABAJO. HACIA EL TEOREMA DE FUBINI

a) ¿Por qué será suficiente considerar sólo el primer octante? Hagan una discusión sobre el tipo de sólido al que le calcularán el volumen (pueden apoyarse en la figura que aparece arriba).

b) Una posibilidad para el cálculo de este volumen consiste en cuadricular la proyección del sólido sobre el plano *xy* (como se muestra en la figura de abajo), y determinar el volumen de columnas que tengan como base los rectángulos mostrados. ¿De qué superficie depende la altura de cada columna?, ¿cuál es la expresión cuya gráfica está representada por la curva de la figura?



c) Completen la siguiente tabla. Para hacerlo será indispensable que entiendas qué tomarás para determinar los valores de la función. Para precisar, tomen f de tal manera que puedan asegurar que el volumen se encuentre acotado entre un valor mínimo y uno máximo. Esto va a requerir hacer dos tablas como las mostradas abajo. Encuentren una estimación al valor del volumen pedido.

Valor por defecto:

0	**0.2**	**0.4**	**0.6**	**0.8**	**1.0**	**1.2**	**1.4**	**1.6**	**1.8**	**2.0**
0.2	f									
0.4										
0.6										
0.8										
1.0										
1.2										
1.4										
1.6										
1.8										
2.0										

Valor por exceso:

0	**0.2**	**0.4**	**0.6**	**0.8**	**1.0**	**1.2**	**1.4**	**1.6**	**1.8**	**2.0**
0.2	f									
0.4										
0.6										
0.8										
1.0										
1.2										
1.4										
1.6										
1.8										
2.0										

d) Calculen sumas manteniendo una fila fija. ¿Qué están calculando con estas sumas? Ahora sumen sus resultados parciales y comparen esta suma con el valor calculado en (c). ¿Qué concluyen?

e) Calculen sumas manteniendo una columna fija. ¿Qué están calculando con estas sumas? Ahora sumen sus resultados parciales y comparen esta suma con el valor calculado en (c) y (d). ¿Qué concluyen?

f) Considera que las divisiones indicadas en la tabla anterior son cada vez más finas, ¿qué esperan? Utilicen las ideas surgidas de los incisos (d) y (e), y a partir de esto establezcan, no la aproximación al volumen, sino el valor exacto. Tendrán que decidir qué cálculo es más sencillo. Den el valor exacto del volumen.