INTEGRAL TRIPLE

De la misma manera que se estableció la forma de integrar en dos dimensiones, se puede extender la idea para un número mayor de dimensiones; en particular para tres dimensiones la integral resultante se llama **triple integral**.

El teorema de Fubini sigue siendo la piedra de ángulo para su cálculo, esto es, a partir de las llamadas **integrales iteradas**.

Por ejemplo, si la región sobre la que requerimos integrar es:

$$\Re = \{(x, y, z)\epsilon\mathbb{R}^3: \phi(x, y) \leq z \leq \theta(x, y), \alpha(x) \leq y \leq \beta(x), a \leq x \leq b\}$$

Entonces:

$$\iiint_{\Re} f(x, y, z)dV = \iiint_{\Re} f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left(\int_{\phi(x,y)}^{\theta(x,y)} f(x, y, z)dz\right)dy\right)dx$$

De aquí se desprenden algunos **principios** que deberán ser observados en todo momento.

a) Los límites de integración deben ser constantes para la variable de integración en turno.

b) Yendo de “adentro” hacia “afuera” en las integrales iteradas, la primera requerirá tres dimensiones, la siguiente dos y la última, una dimensión.

c) **Los límites de integración de la última integral deben ser en todo momento constantes**.

Cabe decir que los mismos principios son válidos para las integrales múltiples sin importar el número de dimensiones que se estén considerando. Para estas integrales también resulta imprescindible en muchos casos la técnica de cambio de variable que consideramos para la doble integral. Tu trabajo consiste en extender las ideas de doble integral a triple integral. No obstante, para este caso las coordenadas polares (dos dimensiones) no pueden aplicarse, en este caso intervendrán preponderantemente las coordenadas cilíndricas y esféricas.

1. Establece la generalización del cambio de variable que utilizamos para dos dimensiones.
2. Calcula los jacobianos de transformación para coordenadas cilíndricas y esféricas.
3. Establece el cambio de variable para una integral triple en coordenadas cilíndricas y esféricas.

NOTA:

De la misma manera que para integrales dobles:

$$A(\Re) = \iint_{\Re} 1\ dA$$

Ahora tenemos que:

$V(\Re) = \iiint_{\Re} 1\ dV$: volumen de una región tridimensional