INTEGRALES DE LÍNEA

Ésta será una sesión de trabajo basada sobre ejemplos concretos acerca del tema.

I. Cálculo directo y propiedades de la integral de línea. Con las formas paramétrica y cartesiana de la curva conocida.

1. Calcula el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la trayectoria $\vec{r}(t) = (cos\ t, sen\ t)$ desde el momento en que $t = 0$ hasta el momento en que $t = \pi$ dentro del campo vectorial $\vec{F}(x, y) = x^2\,\hat{\imath} + 2xy\hat{\jmath}$.

2. Determina el valor de $\oint_C \vec{F}.d\vec{r} = \oint_C (xy + y^2)dx + x^2dy$ donde C es la curva de Jordan del primer cuadrante limitada por $y = x^2$ & $y = x$.

II. Teorema de Green.

1. Resuelve el problema I.2 utilizando el teorema de Green. Compara ambos resultados.

2. Utilizando integral de línea, calcula el área encerrada por la elipse:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

3. Calcula $\oint_C \frac{x^2y}{x^2+1}dx - arctanx\ dy$; donde C es la elipse $4x^2 + 25y^2 = 100$.

III. Integrales de línea en Campos Vectoriales Conservativos. Teorema Fundamental del Cálculo de Integrales de Línea.

1. Prueba que $\vec{F}(x, y) = (cos\ y, -x\ sen\ y)$ es un campo vectorial conservativo. Encuentra un potencial para el campo y calcula la integral de línea del campo sobre la mitad superior de la circunferencia unitaria centrada en el origen y orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj.

2. Determina si el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = ye^z\hat{\imath} + xe^z\hat{\jmath} + xye^z\hat{k}$ es conservativo. Si lo es, determina un potencial para el campo y calcula la integral de línea del campo a lo largo de la trayectoria $\vec{r}(t) = (t^2, t^3, t - 1)$ para $1 \le t \le 2$.

IV. Cálculo de una integral de línea escalar.

Cálculo de una integral de línea escalar. Sea $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una parametrización de la curva C para $a \le t \le b$, entonces:

$$\int_c f(x,y,z)ds = \int_a^b f(\vec{r}(t))\left\|\overrightarrow{r'}(t)\right\| dt$$

1. Calcula $\int_C (x+y+z)\, ds$, donde C es la hélice $\vec{r}(t) = (cos\ t, sen\ t, t)$ para $0 \leq t \leq \pi$.

2. Halla la masa total de un alambre con la forma de una parábola $y = x^2$ para $1 \leq x \leq 4$ (en centímetros) y densidad de masa dada por $\rho(x,y) = y/x$ g/cm.

Las integrales de línea escalares también se utilizan para calcular potenciales eléctricos. Cuando una carga eléctrica se distribuye de forma continua a lo largo de la curva *C*, con densidad de carga $\rho(x,y,z)$, la distribución de carga da lugar a un campo electrostático **E** que es un campo vectorial conservativo. De acuerdo a una ley de Coulomb, $\vec{E} = -\nabla V$ donde:

$$V(P) = k\int_C \frac{\rho(x,y,z)ds}{r_P}$$

Donde $r_P = r_P(x,y,z)$ es la distancia de (x,y,z) a P. El valor de la constante es $k = 8.99 \times 10^9\ Nm^2/C^2$. La función *V* se denomina potencial eléctrico. No está definido para aquellos puntos *P* que no se encuentren sobre *C*, y tiene unidades de voltios (un voltio es Nm/*C*).

3. Una semicircunferencia cargada de radio *R* y centro en el origen en el plano *xy* tiene densidad de carga:

   $$\rho(x,y,0) = 10^{-8}\left(2 - \frac{x}{R}\right)\ C/m$$

   Halla el potencial eléctrico en un punto $P = (0,0,a)$ si $R = 0.1\ m$.