INTEGRALES DE SUPERFICIE

Ésta será una sesión de trabajo basada sobre ejemplos concretos acerca del tema.

ANTECEDENTES:

A) Sea $\vec{r}(u,v) = X(u,v)\hat{\imath} + Y(u,v)\hat{\jmath} + Z(u,v)\hat{k}$ para $(u,v) \in T$ la representación paramétrica de una superficie. Se define el **producto fundamental** como:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} \hat{\imath} + \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial u} \\ \frac{\partial Z}{\partial v} & \frac{\partial X}{\partial v} \end{vmatrix} \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix} \hat{k}$$

$$= \frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}\hat{\imath} + \frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}\hat{\jmath} + \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\hat{k}$$

B) Los vectores $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \,\&\, \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$ determinan un plano tangente a la superficie. Para este plano, $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$ representa un vector normal al mismo. Si $\Delta u, \Delta v$ representan las longitudes de los lados de un rectángulo en *T*, entonces al mapearse este rectángulo en la superficie, el área de la porción de la superficie mapeada es aproximadamente:

$$\left\| \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v$$

Es decir, la magnitud del producto fundamental es un "factor de proporcionalidad" entre el área plana del rectángulo de lados $\Delta u, \Delta v$ y el su mapeo en el plano tangente.

C) El **área de una superficie** *S* está dada por:

a) Si se conoce su parametrización $\vec{r}(u,v) = X(u,v)\hat{\imath} + Y(u,v)\hat{\jmath} + Z(u,v)\hat{k}$ para $(u,v) \in T$:

$$a(S) = \iint_T \left\| \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} \right\| du dv$$

b) Si la superficie está dada en forma explícita por $z = f(x,y)$ y su proyección en el plano *xy* es *T*:

$$a(S) = \iint_T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx dy$$

Hay fórmulas análogas si la superficie se proyecta a los planos *yz*, o bien *xz*.

c) Si S está dada de forma implícita por la ecuación $F(x,y,z)=0$, con una proyección de la superficie al plano *xy*:

$$a(S)=\iint_T \frac{\sqrt{(\partial F/\partial x)^2+(\partial F/\partial y)^2+(\partial F/\partial z)^2}}{|\partial F/\partial z|}\,dxdy$$

D) **Integrales de superficie de funciones escalares**. En lo que sigue mantenemos la notación del inciso A). La integral de superficie de una función f escalar sobre *S* se define mediante:

$$\iint_{r(T)} f\,dS=\iint_S f\,dS=\iint_T f(\vec{r}(u,v))\left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right\|dudv$$

Aquí, $r(T)$ representa a la superficie S (razón por la cual también se escribe $S=r(T)$) mientras que *T* es el conjunto de parámetros (u,v).

E) **Integrales de superficie de funciones vectoriales**. Requerimos dar una "orientación" a las superficies. Se dice que la superficie *S* tiene **orientación positiva** si en cada uno de sus puntos, el producto fundamental y *S* están en lados opuestos del plano tangente a *S* determinado por los vectores $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\&\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$. El **exterior** de *S* está en la dirección que señala el vector $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$, y el **interior** hacia donde apunta el vector $-\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$.

Sea $\vec{F}$ un campo vectorial definido en *S*. La integral de superficie de $\vec{F}$ sobre *S* se calcula mediante:

$$\iint_S \vec{F}.d\vec{S}=\iint_S \vec{F}.\hat{n}\,dS=\iint_T \vec{F}.\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)du\,dv$$

Observa que:

$$d\vec{S}=\hat{n}\,dS$$

Donde $\hat{n}$ es un **vector normal unitario a la superficie**. De acuerdo a lo discutido hasta aquí, este vector en general podrá determinarse a partir del producto fundamental, en efecto:

$$\hat{n}=\frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right\|}$$

Así, la **integral de superficie de un campo vectorial se calcula de acuerdo a su orientación positiva**. La interpretación más importante de este tipo de integrales es que miden el **flujo de un campo vectorial $\vec{F}$ a través de la superficie** *S*.

I. **El producto vectorial fundamental**.

Calcula la magnitud del producto vectorial fundamental en términos de u & v.

1. $\vec{r}(u,v) = a\ sen\ u\ cosh\ v\ \hat{\imath} + b\ cos\ u\ cosh\ v\ \hat{\jmath} + c\ senh\ v\ \hat{k}$

2. $\vec{r}(u,v) = (u+v)\,\hat{\imath} + (u-v)\,\hat{\jmath} + 4\,v^2\,\hat{k}$

II. **Área de una superficie.**

1. Considera la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = a^2; z \geq 0$. Determina el área de su superficie. ¿De qué superficie se trata?

2. Supongamos que una curva *C*, inicialmente en el plano *xz*, gira alrededor del eje *z*. Sea $z = f(x)$ su ecuación en el plano *xz*, donde $a \leq x \leq b, a \geq 0$. Como ya hemos discutido en sesiones anteriores, la superficie así engendrada puede representarse paramétricamente por la ecuación:

$$\vec{r}(u,v) = u\ cosv\ \hat{\imath} + u\ senv\ \hat{\jmath} + f(u)\ \hat{k}$$

   Para $u \in [a,b]; v \in [0,2\pi]$. Encuentra una fórmula para el cálculo del área de la superficie descrita. Luego aplícala a la superficie de rotación $z = sen\ x$ para $x \in [0,\pi]$ que gira en torno al eje *z*.

3. Determina el área de la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ sobre la región del plano limitada por $[1,3] \times [2,6]$.

III. **Integrales de superficie.**

1. Calcula la integral $\iint_S\ x\ dS$, donde S es la porción de la superficie $z = x^2 + y$ limitada por los planos $x = 0, x = 2, y = 0$ & $y = 1$.

2. Calcula la integral $\iint_S\ z\ dS$, donde S es la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está abajo del plano $z = 1$.

3. Calcula la integral $\iint_S\ \vec{F}.d\vec{S}$ para la cual $\vec{F}(x,y,z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ y la superficie se parametriza por $\vec{r}(u,v) = (\cos u \cos v)\ \hat{\imath} + (\cos v\ sen\ u)\hat{\jmath} + (sen\ v)\ \hat{k}$ para $0 \leq u \leq 2\pi$ & $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

4. Calcula la integral $\iint_S\ \vec{F}.d\vec{S}$ para la cual $\vec{F}(x,y,z) = y\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + z\hat{k}$ y la superficie S es la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está abajo del plano $z = 1$.