"Apegándome al Código de Ética de los Estudiantes del Tecnológico de Monterrey, me comprometo a que mi actuación en este examen esté regida por la honestidad académica. En congruencia con el compromiso adquirido con dicho código, realizaré este examen de forma honesta y personal, para reflejar, a través de él, mi conocimiento y aceptar, posteriormente, la evaluación obtenida."

Tecnológico de Monterrey

Fecha y firma _____

Nombre: _____

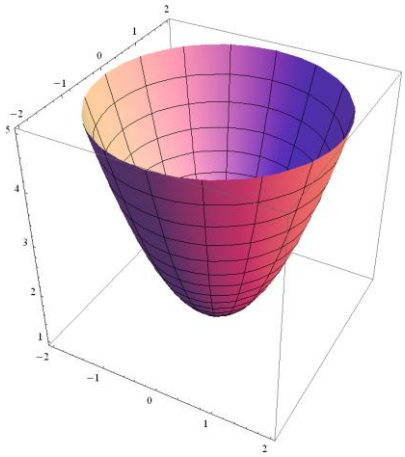
Matrícula: _____

EXAMEN VERSIÓN A

Indicaciones:

- Este examen consta de 5 preguntas, cada una con un valor de 20 puntos.
- Cada problema/ejercicio debe tener procedimiento **ordenado y completo** que justifique adecuadamente la respuesta dada.
- **Si falta el procedimiento** o éste no justifica la respuesta, **entonces el problema vale 0 puntos** aunque la respuesta sea correcta.
- No olvides identificar el ejercicio e inciso que estás resolviendo.
- **No se permite el uso de formularios ni de calculadoras.**
- No puedes contestar el teléfono celular durante el examen, ni hacer uso de gadgets.
- Cualquier intento de fraude amerita **DA**.
- Un examen **sucio y/o en desorden** puede provocar **10 puntos menos** en la calificación del examen.

1. Considera la función: $z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$, determina:
   a) Su dominio e imagen. **(5%)**
   b) Su gráfica, incluyendo trazas y curvas de nivel. **(15%)**
   RESPUESTA:



a) $Df = \mathbb{R}^2$; $If = [1, +\infty)$
b) trazas:

xy: $no\ hay$
x^2: $z = x^2 + 1$
x^2: $z = y^2 + 1$
$\boldsymbol{CN: x^2 + y^2 + 1 = N \leftrightarrow x^2 + y^2 = N - 1}$

2. Sea $z = f(x, y) = \dfrac{xy}{x + y}$, determina la doble derivada $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

RESPUESTA:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x+y)y - xy(1)}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2}$$

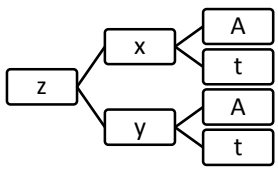
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2}{(x+y)^2}\right) = \frac{(x+y)^2(2y) - y^2 \cdot 2(x+y)}{(x+y)^4}$$

$$= \frac{2xy + 2y^2 - 2y^2}{(x+y)^3} = \frac{2xy}{(x+y)^3}$$

3. **Utiliza la regla de la cadena** para hallar $\frac{\partial z}{\partial t}$, si $z = \ln(xy)$, $x = se^{st}$, $y = 1 + se^{-t}$.

   Tu resultado debe quedar en términos de las variables x, y, s & t.

   RESPUESTA:



$$\rightarrow \frac{\partial z}{\partial t} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

$$z_x = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}; x_t = A^2 e^{At}; \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y}$$

$$y_t = -Ae^{-t} \rightarrow \therefore \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{A^2 e^{At}}{x} - \frac{-Ae^{-t}}{x}$$

4. La siguiente tabla de valores registra las utilidades (U) de una empresa (en millones de pesos) que proyecta ganar por concepto de las cantidades invertidas en publicidad vía televisión (x) y vía radio (y) (ambas cantidades en cientos de miles de pesos).

$x \setminus y$	5.2	5.3	5.7	6.4
10.4	**2.3**	**2.1**	**2.6**	**3.1**
10.7	**4.3**	**4.2**	**4.8**	**5.1**
11.3	**5.1**	**5.2**	**5.4**	**5.8**
11.4	**5.9**	**6.2**	**6.5**	**6.8**

Actualmente se invierten $x = 10.7$, $y = 5.3$ (unidades de cien mil) pesos.

a) Determina la tasa de cambio instantánea de la función de utilidad (U) si estas cantidades se planean modificar aumentando la primera en un 20% y la segunda en un 15%.

b) Determina la linealización de la función de utilidad en (10.7, 5.3) y obtén una aproximación al valor de $U(10.8, 5.25)$.

RESPUESTA:

a) $x_0 = 10.7$; $y_0 = 5.3$

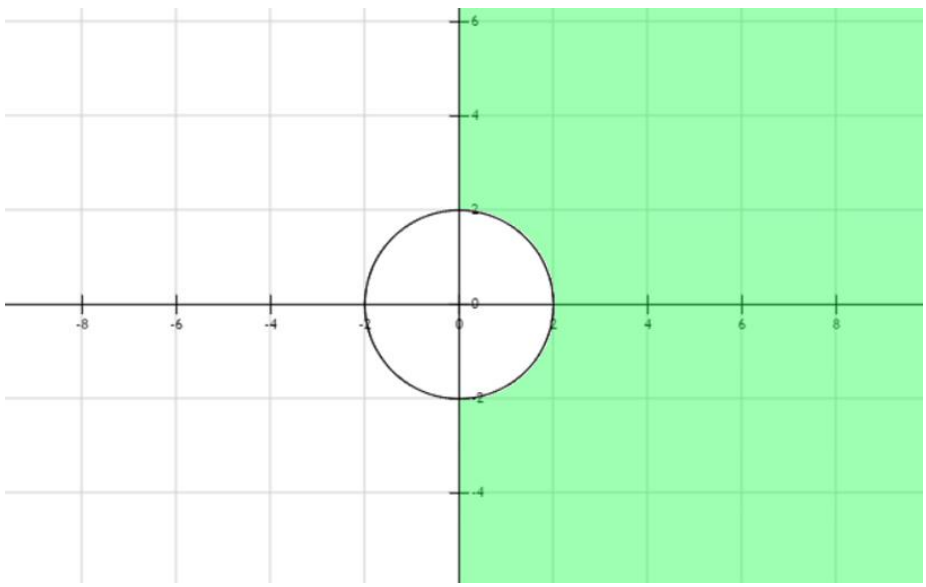
$x_1 = 1.2(10.7) = 12.84$; $y_1 = 1.12(5.3) = 6.095$

$\overrightarrow{P_0P_1} = P_1 - P_0 = (2.14, 0.795)$

$\left\|\overrightarrow{P_0P_1}\right\| = \sqrt{2.14^2 + 0.795^2} = 2.2829$

$$\hat{u} = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{\|\overrightarrow{P_0P_1}\|} = (0.9374, 0.34824)$$
$$D_{\hat{u}} = U(10.7,5.3) = \nabla U(10.7,5.3) \cdot \hat{u}$$
$$\frac{\partial U(10.7,5.3)}{\partial x} = \frac{U(10.4,5.3) - U(10.7,5.3)}{10.4 - 10.7} = \frac{2.1 - 4.2}{-0.3} = 7$$
$$\frac{\partial U(10.7,5.3)}{\partial y} = \frac{U(10.7,5.2) - U(10.7,5.3)}{5.2 - 5.3} = \frac{4.3 - 4.2}{-0.1} = -1$$
$$\therefore D_{\hat{u}} = U(10.7,5.3) = (7,-1) \cdot (0.9374, 0.348224) = 6.21356$$

b) $L(x,y) = 4.2 + 7(x - 10.7) - (y - 5.3)$
$U(10.8,5.25) \approx L(10.8,5.25) = 4.95$

5. Dibuja la región que representa el dominio de la función:
$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 4) + y\sqrt{x}.$$

RESPUESTA:
$$x^2 + y^2 - 4 > 0 \leftrightarrow x^2 + y^2 > 4$$
$$x \geq 0$$