CÁLCULO VECTORIAL

SUPERFICIES PARAMETRIZADAS

Ya hemos trabajado con superficies, con mayor énfasis en sus formas cartesianas del tipo $z = f(x,y)$ o bien $F(x,y,z) = 0$. Ahora, debemos añadir a nuestras descripciones **superficies parametrizadas** (en realidad ya hemos tratado el asunto, pero es importante tratarlas con mayor detalle). Éstas tienen la forma:

Definición.
Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto de parámetros $(u,v)\epsilon D$. Una superficie paramétrica con parámetros u,v es una superficie que se puede describir mediante **ecuaciones paramétricas** de la forma:

$$\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \text{ , } (u,v)\epsilon D \\ z = h(u,v) \end{cases}$$

Como un símil de las funciones vectoriales, podemos decir que una superficie es la traza de una función vectorial de la forma:

$$\vec{r}(u,v) = (f(u,v), g(u,v), h(u,v)); (u,v)\epsilon D$$

Cabe decir que una función de la forma $z = f(x,y)$ cae en la descripción anterior si consideramos a las variables x, y como parámetros de la función. En efecto, una función $z = f(x,y)$ es equivalente a la forma:

$$\vec{r}(x,y) = (x, y, f(x,y); (x,y)\epsilon D$$

Ye hemos graficado funciones de la forma $z = f(x,y)$ y aunque éstas no han quedado descartadas del estudio presente, daremos prioridad a la forma parametrizada de una superficie.

Actividad 1.
Para dibujar una superficie parametrizada en Mathematica recurriremos al comando ParametricPlot3D. Revisen cómo se le utilizó en el primer periodo del curso y grafiquen las siguientes superficies.

a) Una esfera con centro en $(0,0,0)$ y radio igual a 1.
b) Una esfera con centro en $(1,-2,3)$ y radio igual a 2.
c) Un cono con ecuación cartesiana $z = x^2 + y^2$.
d) La superficie

$$\vec{r}(u,v) = (2\, senu\, cosv, 4\, senu\, senv, cosu); (u,v)\epsilon[0,2\pi] \times [0,\pi]$$

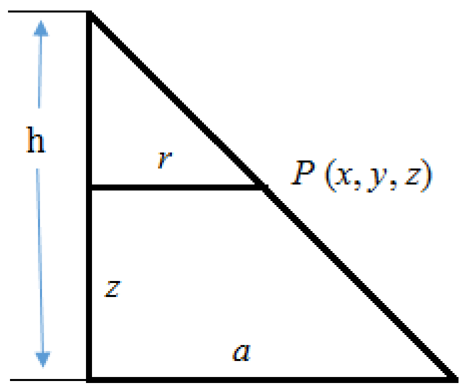
Actividad 2.
Un tipo importante de superficies son las que se originan por rotación. Estas superficies tienen un eje de simetría rotacional y secciones transversales circulares perpendiculares a ese eje. Estas superficies se conocen como **superficies de revolución**. En realidad, también ya

discutimos este tipo de superficies, pero no estará de más echar un segundo vistazo ahora que ya disponemos de las coordenadas cilíndricas con las que apoyaremos nuestra discusión.

a) Encuentren la superficie de revolución que corresponde al cono con base la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ en el plano $z = 0$, y cuyo vértice está a una altura h sobre el plano $x\,y$.

b) Después de hallar su ecuación, grafíquenla utilizando Mathematica con el mismo comando que se indicó en la Actividad 1. Tomen valores específicos para h & a, por ejemplo, $h = 3; a = 2$.

Para la parte a), consideren la siguiente figura que corresponde a una sección transversal del cono. En síntesis, deben hallar la descripción general del punto $P(x, y, z)$ de la superficie. Piensen en coordenadas cilíndricas, ¿cómo se describe la superficie? Obtengan su ecuación.



c) Extiendan la idea para hallar la superficie de revolución de una “trompeta”. Supongan que la curva generatriz de la trompeta está dada por la función escrita abajo y que el eje de giro es el eje x.

$$f(x) = \frac{6}{(x+1)^{0.7}}$$

Determinen la ecuación de su superficie, después grafíquenla usando Mathematica.

Actividad 3.
Nuestro siguiente trabajo será dibujar simultáneamente una superficie y un campo vectorial. El siguiente ejemplo dará la muestra sobre cómo realizar esta tarea. Incorpora las siguientes instrucciones en Mathematica. Presta atención a lo que estás incorporando, interpreta.

$\text{superficie} = \text{ParametricPlot3D}[\{2 * \text{Cos}[\text{theta}] * \text{Sin}[\text{phi}], 2 * \text{Sin}[\text{theta}] * \text{Sin}[\text{phi}], 2 * \text{Cos}[\text{phi}]\}, \{\text{theta}, 0, 2 * \text{Pi}\}, \{\text{phi}, 0, \text{Pi}/2\}, \text{Boxed} \to \text{False}, \text{Axes} \to \text{None}]$
$\text{campo} = \text{VectorPlot3D}[\{x, y, z\}, \{x, -3,3\}, \{y, -3,3\}, \{z, 0,3\}, \text{VectorPoints} \to 5, \text{Boxed} \to \text{False}, \text{Axes} \to \text{None}]$
$\text{Show}[\text{superficie}, \text{campo}]$

Repite las instrucciones anteriores para los siguientes campos y superficies.

a) La superficie $z = 4 - x^2 - y^2$ junto con el campo descrito por:
$\vec{F}(\mathrm{x, y, z}) = \{\mathrm{sen}(x * y), \cos(y * z), z\}; -3 \leq x \leq 3\ , -3 \leq y \leq 3\ \&\ -3 \leq z \leq 3.$

b) La superficie $\emptyset = -\frac{\pi}{4}$ (en coordenadas esféricas) y el campo vectorial
$\vec{F}(\mathrm{x, y, z}) = \{-\mathrm{x} * \mathrm{y}, \mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathrm{z}, -z\}; -2 \leq x \leq 2\ ,\ -2 \leq y \leq 2\ \&\ -3 \leq z \leq 1.$

c) La superficie cilíndrica con traza en el plano x, y dada por $x^2 + y^2 = 4$ para $-2 \leq z \leq 2$ con el campo vectorial:
$\vec{F}(\mathrm{x, y, z}) = \{-\mathrm{x}, \mathrm{z}, \mathrm{y} - z\}; -2 \leq x \leq 2\ ,\ -2 \leq y \leq 2\ \&\ -3 \leq z \leq 1.$