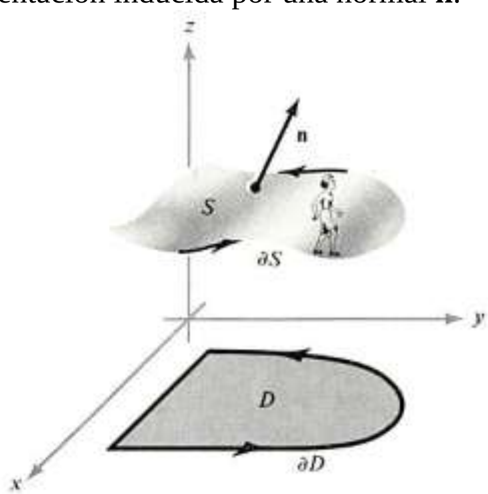
TEOREMAS INTEGRALES: STOKES Y GAUSS

Ésta será una sesión de trabajo basada sobre ejemplos concretos acerca del tema. Las siguientes son las condiciones y enunciados de estos dos teoremas.

ANTECEDENTES:

1. Antes de iniciar, es importante considerar que el sentido tanto de la superficie como de la curva frontera de ésta se consideran en forma correcta. Para recordar esta orientación (es decir, la dirección positiva) de la frontera de la superficie ∂S, podemos imaginar a un "observador" caminando a lo largo de la frontera de la superficie donde la normal apunta para el mismo lado que su cabeza, se estará moviendo en la dirección positiva si la superficie queda a su izquierda (ver figura de abajo). Esta orientación de ∂S suele llamarse orientación inducida por una normal **n**.



2. **TEOREMA DE STOKES.**

   Sea S una superficie, y ∂S su frontera ambas descritas en sentido positivo tal y como ya se ha definido. Si $\vec{F}$ es un campo vectorial que abarca a S y su frontera, entonces:

$$\iint_S rot\vec{F}.d\vec{S} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}).d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F}.d\vec{r}$$

3. El teorema de Gauss asegura que el flujo de un campo vectorial hacia afuera de una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia de ese campo vectorial sobre el volumen encerrado por la superficie.

4. Las superficies cerradas se pueden orientar de dos maneras. En la primera, la orientación exterior, la normal apunta hacia afuera en el espacio, y en la segunda, la orientación interior, la normal apunta hacia adentro de la región acotada.

5. **TEOREMA DE LA DIVERGENCIA DE GAUSS.**

Sea $\mathfrak{R}$ una región del espacio tridimensional, y sea $\partial\mathfrak{R}$ la superficie cerrada que representa la frontera de la región $\mathfrak{R}$, en otras palabras que encierra a $\mathfrak{R}$. Si $\vec{F}$ denota un campo vectorial que "cubre" $\mathfrak{R}$, entonces:

$$\iiint_{\mathfrak{R}} \left(\nabla.\vec{F}\right) dV = \iiint_{\mathfrak{R}} \left(\mathrm{div}\,\vec{F}\right) dV = \iint_{\partial\mathfrak{R}} \vec{F}.d\vec{S} = \iint_{\partial\mathfrak{R}} \left(\vec{F}.\hat{n}\right).dS$$

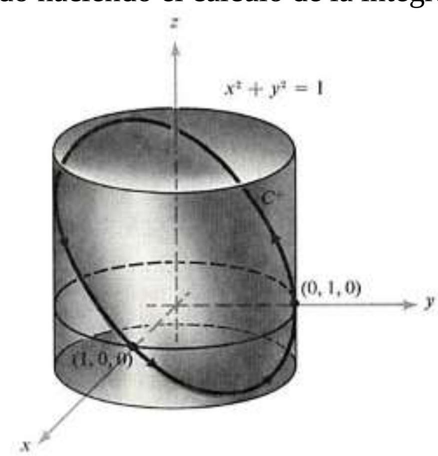
I. Ilustración del teorema de Stokes.

1. A) Usa el teorema de Stokes para evaluar la integral de línea

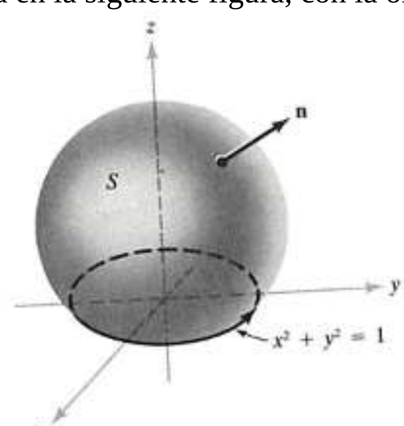
$$\int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$$

Donde C es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 1$ y la orientación de C corresponde al movimiento en sentido contrario al que giran las manecillas del reloj en el plano *xy* (ver figura).

B) Verifica tu resultado haciendo el cálculo de la integral de línea de manera directa.



2. Sea S la superficie mostrada en la siguiente figura, con la orientación indicada.



Sea $\vec{F}(x,y,z) = y\hat{\imath} - x\hat{\jmath} + e^{xz}\hat{k}$, calcula $\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right).d\vec{S}$.

II. Ilustración del teorema de Gauss.

1. Considera $\vec{F}(x, y, z) = (2x, y^2, z^2)$. Sea S la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Evalúa:

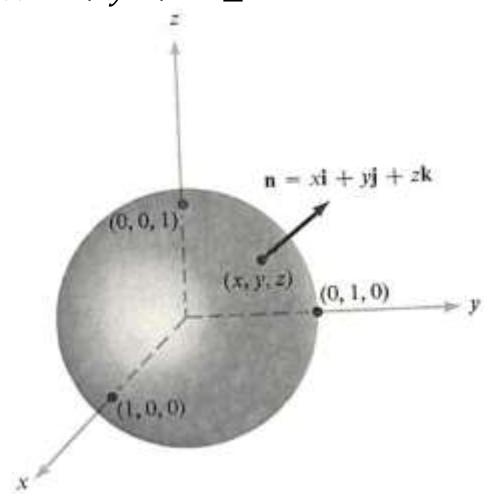
$$\iint_S \vec{F}.d\vec{S}$$

(Cabe la aclaración de lo difícil que resulta el cálculo directo).

2. Usa el teorema de divergencia para evaluar

$$\iint_{\partial\mathfrak{R}} (x^2 + y + z)\, dS$$

Donde $\mathfrak{R}$ es la bola sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.



3. Evalúa $\iint_S \vec{F}.d\vec{S}$, donde $\vec{F}(x, y, z) = xy^2\hat{\imath} + x^2y\hat{\jmath} + y\hat{k}$ y S es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acotado por los planos $z = 1, z = -1$; incluidas las porciones $x^2 + y^2 \leq 1$ cuando $z = \pm 1$.