Unidad 6: Introducción a las integrales múltiples

"Las cosas de este mundo no pueden darse a conocer sin el conocimiento de las matemáticas"
Roger Bacon, matemático y científico

Ingresos promedio de una armadora de vehículos en México

Figura 1. La pujante industria automotriz en México

Según la Asociación Mexicana de la Industria Automotriz (AMIA), México logró incrementar su producción y exportación de vehículos durante el mes de febrero de 2017, al incrementar 11.1% y 9.7% en estos rubros, respectivamente; por lo que, pese a las vicisitudes que afronta el país con relación a su economía y la presión política del vecino país del norte, México sigue bien posicionado sobre una industria de la que ha echado mano desde hace varios años para fortalecer su economía.

Como es sabido existen diversas firmas automotrices de competencia internacional que se han interesado en México dada su calidad y ventajosa ubicación geográfica. Sin entrar en nombres particulares, una empresa coreana recientemente ha logrado posicionarse en el mercado nacional con una campaña agresiva de ventas que incluye mercadotecnia, calidad, servicio y precios muy competitivos dentro de un mercado en el que incluso ha desplazado ya a otras marcas bien establecidas y con un alto arraigo en México.

Un modelo subcompacto de esta marca (no identificada con toda intención) está haciendo algunas consideraciones en cuanto al precio de introducción y su estimación de ventas en el lapso de su primer año en el mercado. Su análisis para el precio de introducción debe comparar por supuesto lo que ya existe en el mercado y su proyección en lo que toca a la demanda esperada. Supongan que la decisión para fijación del precio de esta submarca oscila entre 147 mil pesos y 156 mil pesos.

Sin dudar, una campaña de introducción al mercado implica largas horas de trabajo y análisis. Supongan también que el departamento de mercadotecnia tiene estimada la demanda (obviamente como función del precio de venta) y que ésta queda determinada entre $q = 5000 - 0.02p$ & $q = 7000 - 0.03p$. Nótese que ambas cantidades: precio y demanda contemplan niveles de incertidumbre. La pregunta que deseamos proponerles es la siguiente: ¿Cuál es el posible ingreso promedio que esta compañía podría esperar durante su primer año de operaciones en el mercado para esta submarca?

(Nota: se entiende que una de las dificultades inherentes al planteamiento y análisis de una situación como ésta radica en el hecho de que no hay acceso privilegiado a los datos de la empresa, por esta razón las cantidades se han establecido sobre el conocimiento somero que las propias empresas llegan a hacer público). Les pedimos que en equipo, revisen y trabajen sobre la siguiente guía de solución.

A) ¿Qué unidades deben tener los factores 0.02 y 0.03 de las cantidades q que se han indicado?

B) En general, ¿cómo se calculan los ingresos de una empresa?, ¿qué factores intervienen? Interpreten el tipo de la información, ¿por qué consideran que se podría poseer de esta manera y no con valores específicos para precio y demanda?

C) Escriban a nivel de desigualdades las condiciones indicadas para ventas y precios de venta.

D) Recuerden: ¿cómo se obtiene el promedio de una función de una variable? Extiendan este concepto para una función de dos variables.

E) Estimen el ingreso promedio esperado de esta empresa para el vehículo subcompacto que pretenden incorporar al mercado mexicano.

Solución:
(**<u>Nota editorial</u>**: esta solución es parte del texto correspondiente a la Unidad 6 y al problema de inicio, sin embargo, éste no es necesariamente el lugar que debe ocupar. Se debe dar una composición final que corresponda al resto del libro).

A) La variable q se refiere a la cantidad de vehículos que se pronostica se han de vender, mientras que p es el precio de venta unitario. Por lo tanto, para que haya correspondencia dimensional entre ambas cantidades, los factores 0.02 y 0.03 deben estar dimensionalmente en $\left[\frac{unidades}{pesos}\right]$.

B) Los factores que intervienen en el cálculo de los ingresos son, por supuesto, precio de venta por unidad: p, y la cantidad de unidades vendidas, q. Por lo tanto, la función de ingresos es:

$$I(p, q) = pq$$

Lo interesante de la situación planteada radica en el hecho de que ambos factores son inciertos pues se trata de una empresa que no sabe a ciencia cierta la respuesta de un mercado tan competido como lo es el de autos subcompactos. Esta incertidumbre se aprecia en la forma en que son descritas ambas variables p, q; ambas se han indicado, no con valores únicos y específicos sino dentro de un rango de valores que dejan ver la fluctuación de las posibilidades para ambas cantidades. La región de posibles valores para p & q se muestra en la siguiente figura:

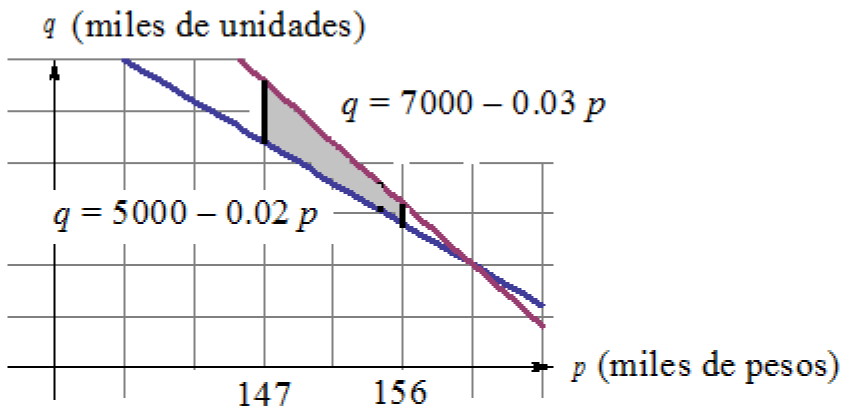

Figura 2. Región de posibles valores de las variables *p, q*

C) De acuerdo con la información:

$$147000 \leq p \leq 156000$$

$$5000 - 0.02p \leq \mathrm{q} \leq 7000 - 0.03p$$

D) Recordamos que el promedio de una función f en un intervalo cerrado $[a, b]$ está dado por (ver primeras unidades del libro):

$$\overline{f_{[a,b]}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Extrapolando esta definición para una función de dos variables, definimos el promedio de una función $z = f(x, y)$ definida sobre una región R como:

$$\bar{f}_R = \frac{1}{\acute{a}rea(R)}\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$$

E) Hacemos el cálculo indicado en el inciso anterior. Determinamos en primer lugar el área de la región, tenemos:

$$\acute{a}rea(R) = \iint_R 1dA = \int_{147000}^{156000}\int_{5000-0.02p}^{7000-0.03p} dqdp\,;$$

$$\acute{a}rea(R) = \int_{147000}^{156000} [(7000 - 0.03p) - (5000 - 0.02p)]\, dp;$$

$$\acute{a}rea(R) = \int_{147000}^{156000} (2000 - 0.01p)dp = 4.365 \times 10^6$$

Ahora, calculamos $\iint_R \ I(p,q)dpdq$. Tenemos:

$$\iint_R \ I(p,q)dpdq = \int_{147000}^{156000} \int_{5000-0.02p}^{7000-0.03p} pq\; dq\; dp;$$

$$\iint_R \ I(p,q)dpdq = \int_{147000}^{156000} \left(\frac{pq^2}{2} \middle| \begin{matrix} q = 7000 - 0.03p \\ q = 5000 - 0.02p \end{matrix} \right) dp;$$

$$\iint_R \ I(p,q)dpdq = \frac{1}{2}\int_{147000}^{156000} [p(7000 - 0.03p)^2 - p(5000 - 0.02p)^2]dp$$

Al calcular esta integral, obtenemos:

$$\iint_R \ I(p,q)dpdq \approx 1.46334 \times 10^{15}$$

Por lo tanto:

$\bar{I} = \frac{1.46334\times 10^{15}}{4.365\times 10^{6}} = \$\ 335,244,000$: Ingreso promedio esperado en el primer año

Introducción

Durante las primeras unidades hemos considerado las generalidades del proceso de integración en una variable. Ahora, nos adentraremos en el cálculo de integrales múltiples. El caso presentado en la introducción de esta unidad es una de las tantas posibles aplicaciones que se le podrían dar a esta teoría. Abordaremos en primer lugar el tema del cálculo de integrales dobles. Lo haremos a partir de un resultado que se atribuye al matemático italiano Guido Fubini. A través del teorema que lleva su apellido, plantearemos el cálculo de las integrales múltiples por medio de las llamadas integrales iteradas, éstas no son otra cosa que integrales tal y como las que se han estudiado en las unidades anteriores sobre una variable. En efecto, una idea central en el cálculo de varias variables tanto en derivación como en integración consiste en variar una variable a la vez. Esta concepción nos permitirá contemplar a las demás variables como si se tratase de constantes. Tal es la idea básica en el proceso de integración. En realidad, es ésta la razón por la cual en integración múltiple no existe el concepto de integral indefinida, por lo tanto, las únicas integrales que tienen sentido en lo que sigue serán las integrales múltiples definidas y determinadas por una región de integración.

Se observará que en la medida que avancemos; como estrategia general, al integrar, nos cuestionaremos sobre las dos preguntas cruciales de esta unidad, a saber: ¿qué integrar?, ¿dónde integrar? De acuerdo con esto, parte de las técnicas nuevas que deberán estudiarse tienen que ver no con técnicas de integración que dicho sea de paso aquí propiamente no existen (lo que se tiene para una variable es más que suficiente). Las técnicas aquí tienen que ver ante todo con la geometría de las superficies y sus proyecciones hacia las regiones de integración. Por lo tanto, trabajaremos sobre descripciones, sobre todo de la región de integración, porque éstas serán el pilar para el planteamiento correcto de las integrales múltiples. En lo que toca a las aplicaciones, éstas se enfocarán primordialmente al cálculo de volúmenes, áreas y una aplicación de la estática: el cálculo de masas y centros de masa.

Figura 3. Guido Fubini

Objetivos

Al terminar esta sección serás capaz de:

a) Comprender los aspectos esenciales de los que se compone una integral múltiple.
b) Aplicar el teorema de Fubini para calcular integrales doble y triple.
c) Aplicar las ideas de selección de orden e intercambio de límites de integración como técnicas estándar para evaluar integrales múltiples.
d) Aplicar integrales múltiples al cálculo de áreas, volúmenes, masa y centro de masa.
e) Usar las ideas de la integral doble como extensión para integrales triples.

Integral doble

En un acercamiento por demás intuitivo, veremos cómo se genera la idea de una integral doble. Una réplica de la idea de sumas de Riemann para funciones de dos variables se apreciaría como en la siguiente figura.

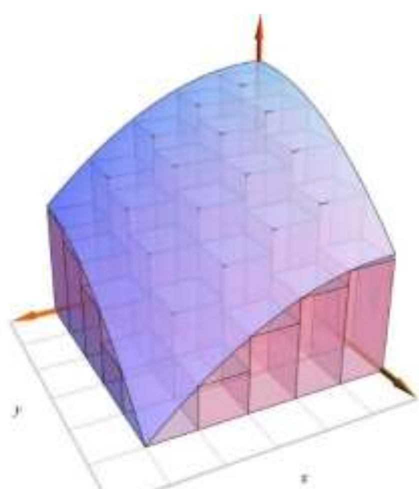

Figura 4. Aspecto general de la sumas de Riemann

Una superficie $z = f(x, y)$ y el plano xy, delimitan un sólido como se muestra en la Figura 4. Como puede apreciarse, los subintervalos de los que hablamos en integración de una variable, ahora se han convertido en subrectángulos que dividen la proyección de la superficie sobre el plano xy; una región plana que de aquí en adelante indicaremos como R.

Intuitivamente, el volumen total puede aproximarse si sumamos los volúmenes de todas estas columnas bajo la superficie mostrada (algunas columnas podrían tener una altura que sobrepase la superficie). A su vez, cada volumen se calcularía simplemente multiplicando la altura de cada columna por el área de su base, un área que se indica simbólicamente como $dxdy$, o bien dA.

De manera más precisa:

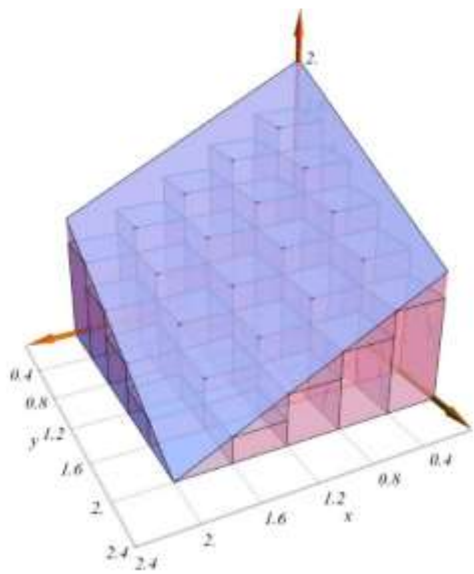

Figura 5. División en subrectángulos. La idea de las sumas de Riemann para la integral definida

Si se desea determinar el volumen limitado por la región R del plano xy y la superficie $z = f(x, y) \geq 0$, éste es:

$$\mathrm{V} = \lim_{|\mathrm{P}| \to 0} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} f(x_i, y_i) \Delta \mathrm{A_i}$$

Donde el sentido del símbolo $|P| \to 0$ es tan simple como que las bases de cada uno de los subrectángulos se hacen cada vez más pequeñas. Si este límite existe, definimos esta expresión como la integral doble de $f(x, y)$ sobre la región R. Es decir,

$$\mathrm{V} = \iint_{\mathrm{R}} f(x, y) \mathrm{dA} = \lim_{|\mathrm{P}| \to 0} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} f(x_i, y_i) \Delta \mathrm{A_i}$$

En el primero de nuestros Ejemplos, expondremos estas ideas fundamentales desde una perspectiva que combine sumas de Riemann con una idea de Fubini: proporcionar cierto orden a la suma anterior que nos permita considerar la variación de una sola variable a la vez.

Cálculo de Volúmenes. Ejemplos

Ejemplo 1. (Teorema de Fubini: Integración iterada)

Calcula el volumen limitado por la intersección de los cilindros:

$$x^2 + y^2 = a^2 \ \& \ x^2 + z^2 = a^2$$

Solución:

La figura tridimensional limitada por estos cilindros no es sencilla. Su aspecto es tal como se muestra en las siguientes figuras 6, 7 y 8.

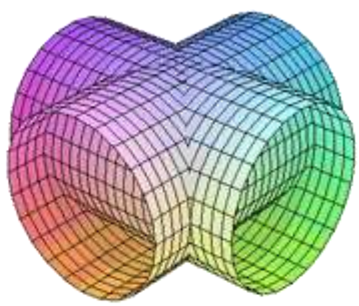

Figura 6. Intersección sin recortes de la intersección de dos cilindros

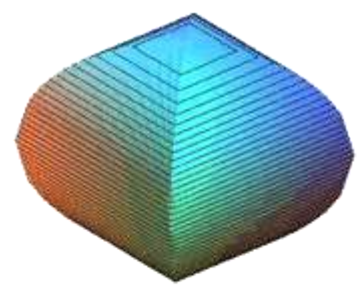

Figura 7. Intersección de dos cilindros con el recorte de los excedentes

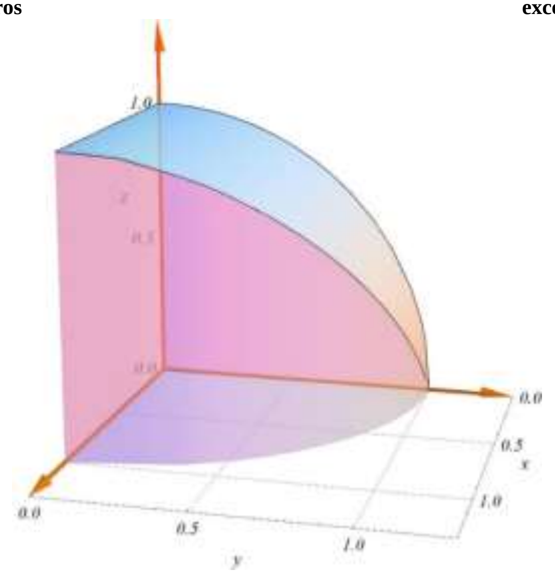

Figura 8. Aspecto de la intersección de los cilindros en el primer octante $x, y, z \geq 0$

Plantearemos el cálculo de su volumen, a partir de la simetría que guarda la figura con respecto al origen, consideraremos únicamente el primer octante que corresponde a la zona tridimensional donde $x, y \ \& \ z \geq 0$.

La idea es “saturar” la región acotada con elementos de división al estilo de la idea de Riemann (recuerda, sólo estamos considerando el primer octante). Lo haremos de forma ordenada, primero un paralepípedo “alargado” que constituirá una “columna” después, a partir de ésta, apilaremos columnas a lo largo del eje “*y*” para formar una “pared” paralela al plano “*yz*”, luego tomamos estas “paredes” para acomodarlas una tras otra a lo largo del eje “*x*”.

Recuerda que en el caso de una variable, se divide el dominio de integración mediante subintervalos. Copiaremos la idea solo que ahora los subintervalos serán subrectángulos de área $dA = dxdy$. Una columna de este tipo tiene un volumen dV igual a:

$$dV = altura * dxdy$$

Ahora bien, la altura, de acuerdo a la Figura 8 queda determinada por la variable “z”. De hecho, ésta es una variable que va del plano xy, donde $z = 0$ al valor “z” de la superficie que limita superiormente al sólido. Este valor “z” debe provenir ni más ni menos que de la superficie $x^2 + z^2 = a^2$ (la ecuación de la otra superficie ni siquiera contiene “z”). Claro, será indispensable despejar la variable de interés, esto es, la variable “z” de la ecuación indicada. Al despejar, hallamos:

$$z = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$$

Como estamos interesados solo en el primer octante, en realidad nos quedamos con $z = \sqrt{a^2 - x^2}$. De esta forma, el volumen de la columna es:

$$dV = \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\, dy$$

No pierdas de vista que la idea es saturar el sólido, intersección de los dos cilindros, con columnas donde la “saturación” se está llevando a cabo con cierto orden. De manera más concreta, una vez establecida la primera columna, ahora formaremos una “pared” de columnas que será paralela al plano “*yz*”. El volumen de la pared es la suma de los volúmenes de las columnas, éstas empiezan en el plano “*xz*” donde $y = 0$ hasta la curva que limita al sólido sobre el plano “*xy*”, esta curva es la que corresponde al cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. Notarás que toda vez que busquemos información para limitar la variación de alguna de las variables, es imprescindible que esta variable esté despejada. Por lo tanto, en este caso, despejamos a la variable “*y*”. Tenemos:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

Donde, como antes, en el despeje de la variable haremos caso omiso del signo negativo porque estamos trabajando en el primer octante. De esta forma, el cálculo del volumen de la “pared” mencionada es:

$$volumenpared = \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2}\, dy\, dx$$

Necesitamos comentar algunos principios generales que refuerzan el planteamiento de este tipo de integrales:

A) Los límites de integración deben ser "constantes" para la variable en turno. Por lo tanto, aunque parezca que el límite superior de la última integral es una variable (por la presencia de la "x"), esto no es así; para la variable de integración en turno, la variable "y", éste límite superior es constante.

B) De acuerdo a lo que se indicó en el inciso A) anterior, aunque la curva:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

Tiene como equivalente la expresión $x = \sqrt{a^2 - y^2}$, ésta no podría colocarse como límite superior de la última integral porque al hacerlo queda "y" y ésta es nuestra variable de integración, así el límite superior no sería constante.

C) En cada caso, cuando se piense en la variación de cualquiera de las variables en un proceso de integración múltiple, esta variación deberá considerar una variación que va del menor al mayor valor.

D) La integral que establece el cálculo de la pared referida contempla en sus límites de integración, dos dimensiones. Lo que se aprecia con más claridad por la presencia de la literal "x". Cuando pasemos a la siguiente etapa, la última integral por resolver deberá ser pensada en una dimensión. Por lo tanto, no podrá exhibir variable alguna, ni en el límite inferior ni en el superior. Los únicos límites posibles deberán ser constantes. No pierdas de vista que "a" es una constante, desconocida cierto, pero constante a final de cuentas.

Siguiendo con nuestra idea de "saturar" con columnas el sólido cuyo volumen deseamos, ahora apilaremos paredes una tras otra a lo largo del eje "x". Esto nos llevará intuitivamente a sumar los volúmenes de las paredes que cubren la totalidad de la zona en el primer octante. Esto se hará indicando una variación a 1 dimensión de la variable faltante. Como ya variamos "y", ahora le toca turno a la variable "x", su variación se puede apreciar sobre el mismo eje "x", y ésta es va de $x = 0$ hasta $x = a$. Por lo tanto, el volumen buscado en el primer octante es:

$$V_1 = Voloctante = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2}\, dy\, dx = \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2} dy \right) dx$$

La forma en la que hemos acomodado las integrales nos permitirá ver que se trata de un proceso que implica dos integrales semejantes a las que hemos trabajado ya en las primeras unidades. La primera, encerrada en el paréntesis, se realiza con respecto a la variable "y", en ésta, no lo olvides, la "variable x" será considerada como constante. Después, en una siguiente integral, integraremos con respecto a la variable faltante "x". Estas dos integrales, insistimos, se calculan tal y como lo hicimos en las primeras unidades se llaman **integrales iteradas**. Por lo tanto, calcular una integral múltiple (porque la idea se puede extender a mayor número de dimensiones) se reduce al cálculo de tantas integrales iteradas como dimensiones estén en la consideración de nuestros cálculos. Esto es la esencia del llamado teorema de Fubini para integración múltiple. Ahora, estamos listos para completar nuestros cálculos:

$$V_1 = \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2} dy \right) dx = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \right) dx$$

Notarás que la expresión $\sqrt{a^2 - x^2}$ salió de la primera integral porque se le puede interpretar como constante en la primera integral en la cual, la variable que está variando es "*y*". Esto nos deja una enseñanza: si la primera integral se hubiese planteado para ser calculada con respecto a la "*x*", entonces este último paso no se hubiese podido realizar (para este orden se requiere sustitución trigonométrica, ver nota A) más adelante). Un aspecto de la integración múltiple es que debemos ser cuidadosos con la mejor forma de iniciar el proceso. Para una misma integral doble existen dos formas de desarrollo, es frecuente que una sea sencilla mientras que la otra podría ser mucho muy complicada o inclusive imposible, en términos de las funciones elementales con las que hemos trabajado en este libro. Al hacer los cálculos de las integrales iteradas, obtenemos:

$$V_1 = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \right) dx = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \left(y|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \right) dx;$$

$$V_1 = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \left(\sqrt{a^2 - x^2} \right) dx = \int_0^a (a^2 - x^2) dx\,;$$

$$V_1 = a^2 x|_0^a - \frac{1}{3} x^3|_0^a = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}$$

Para completar, recordemos que este cálculo corresponde al volumen solo del primer octante, por lo tanto, el volumen total V es:

$$V = 8V_1 = 8\left(\frac{2a^3}{3}\right) = \frac{16a^3}{3}\ unidades\ cúbicas$$

Aprovechamos el Ejemplo 1 para realizar las siguientes apreciaciones:

NOTA:

A) Como hemos dicho, es posible dar un planteamiento alternativo. En este caso, tenemos:

$$V_1 = \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2 - x^2} dx \right) dy$$

Podrás observar que se han respetado también aquí los principios indicados con anterioridad para el planteamiento de las integrales iteradas, sin embargo, la situación ahora no es tan simple como lo fue el planteamiento anterior. Ahora, la primera integral requiere de sustitución trigonométrica y no sólo de "sacar" la expresión de la integral como ocurrió con anterioridad. Esto refuerza el hecho de que este tipo de integrales requerirán un poco de reflexión para determinar el orden de integración más conveniente.

B) Como indicamos con anterioridad, la forma habitual de expresar matemáticamente una doble integral es:

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dxdy$$

Simbólicamente entendemos que al escribir dA nos referimos también a $dxdy$. La región de integración R es en todo caso una proyección al plano "*xy*" de aquella zona de la superficie que deseamos considerar. Algo importante por señalar es que al utilizar la nomenclatura indicada arriba, NO hay un orden de integración establecido, éste se genera solo bajo un esquema de integración iterada.

C) Recordatorio. Lo que leerás a continuación ya fue considerado en el libro. Por claridad para este tema, te recordamos lo siguiente. De acuerdo al teorema de Fubini, el proceso de cálculo de una integral doble se realiza mediante integrales iteradas, la situación general puede ser descrita como sigue en dos CASOS:

CASO 1: **Regiones Tipo I**, la variable "*y*" está despejada.

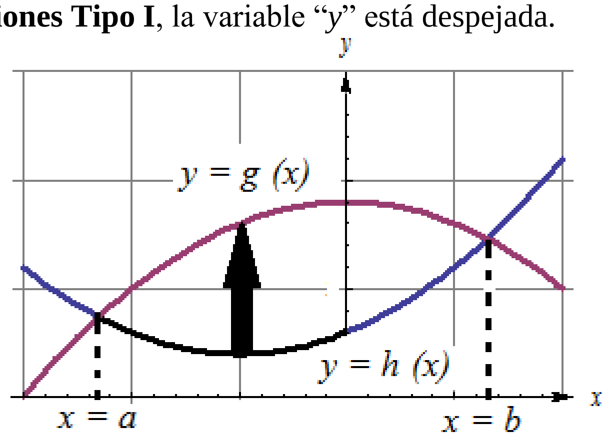

Figura 9. Aspecto general de una región Tipo I

La expresión general, para el cálculo de una integral doble sería:

$$\underbrace{\iint_R f(x,y)dxdy}_{Sin\ orden\ de\ integración} = \underbrace{\int_a^b \left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dy\right)dx}_{Ya\ hay\ orden}$$

CASO 2: **Regiones Tipo II**, la variable "*x*" está despejada.

El aspecto de una región de integración Tipo II es semejante al de la siguiente figura:

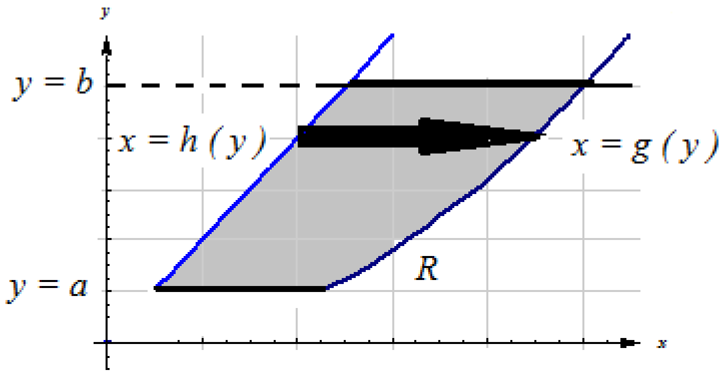

Figura 10. Aspecto general de una región Tipo II

La expresión general, para el cálculo de una integral doble sería en este caso como sigue:

$$\underbrace{\iint_R f(x,y)dA}_{Sin\ orden\ de\ integración} = \underbrace{\int_a^b \left(\int_{h(y)}^{g(y)} f(x,y)dx \right) dy}_{Ya\ hay\ orden}$$

D) Como pudo apreciarse al calcular el volumen del sólido intersección de dos cilindros, imaginar (peor aún dibujar) podría ser una tarea complicada. Una posibilidad para disminuir esta exigencia consiste en prestar atención a la respuesta de las dos siguientes preguntas: ¿qué integrar?, ¿dónde integrar? Tener claridad sobre las respuestas aligera sin duda el peso de la elaboración de una figura tridimensional.

E) Aunque la integral doble puede tener diversas interpretaciones y usos dentro de la matemática, física e ingeniería, su sentido básico (tal y como sucede con la integración en una variable y el cálculo de áreas), tiene como interpretación básica, el cálculo de volúmenes. Se infiere del cálculo del Ejemplo 1 que, en general:

$$V = \iint_R \left(z_{arriba} - z_{abajo} \right) dx\, dy$$

Esto es, el volumen de un sólido limitado superiormente por $z_{arriba} = f_1(x,y)$ e inferiormente por $z_{abajo} = f_2(x,y)$ cuando el sólido se proyecta sobre una región R del plano "xy".

Ejemplo 2. (Integral doble a través de la integración iterada)

Integra $f(x,y) = \cos(x)\cos(y)$, sobre $R = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Solución:

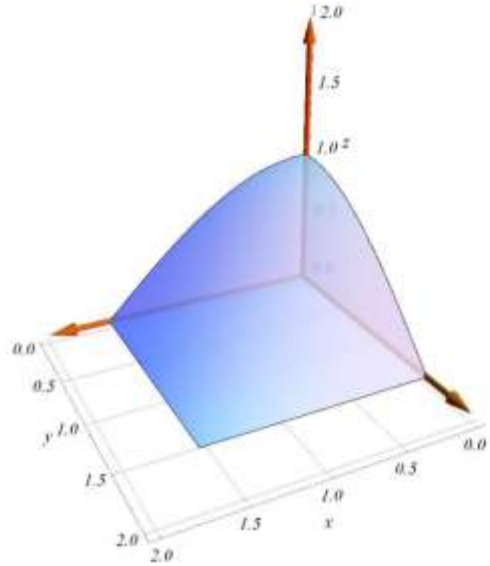

Figura 11. Aspecto de la superficie con ecuación $f(x,y) = \cos(x)\cos(y)$

Integrando se tiene:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos(y)dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)dy \right) dx$$

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx\, [\mathrm{sen}(y)]_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx = [senx]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Ejemplo 3.

Integra $f(x,y) = 4x^3 + 6xy^2$ sobre $R = [1,3] \times [-2,1]$

Solución:

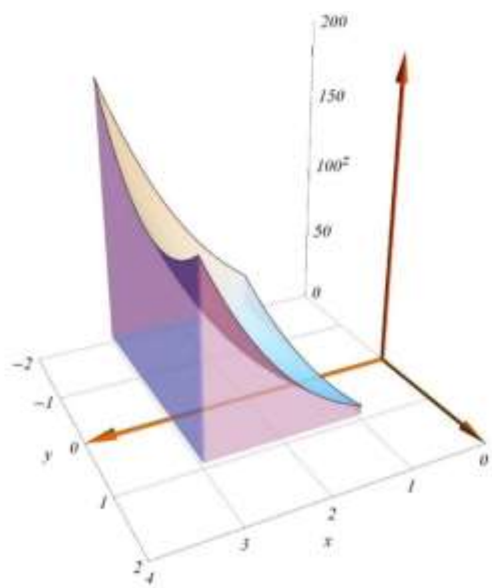

Figura 12. Aspecto de la superficie con ecuación $f(x,y) = 4x^3 + 6xy^2$

Integrando respecto a $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{I} = \int_{1}^{3}\left(\int_{-2}^{1}(\boldsymbol{4x^3 + 6xy^2})\boldsymbol{dy}\right)\boldsymbol{dx} = \int_{1}^{3}[\boldsymbol{4x^3y + 2xy^3}]_{-2}^{1}\boldsymbol{dx}$$

$$\boldsymbol{I} = \int_{1}^{3}(\boldsymbol{4x^3(3) + 2x(9)})\boldsymbol{dx}$$

Integrando respecto a $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{I} = \int_{1}^{3}(\boldsymbol{12x^3 + 18x})\boldsymbol{dx} = [\boldsymbol{3x^4 + 9x^2}]_{1}^{3}$$

$$\boldsymbol{I = 3(81-1) + 9(9-1) = 312}$$

Ejemplo 4.

Calcula $I = \int_3^4 \int_0^y (x+y)dxdy$

Solución:

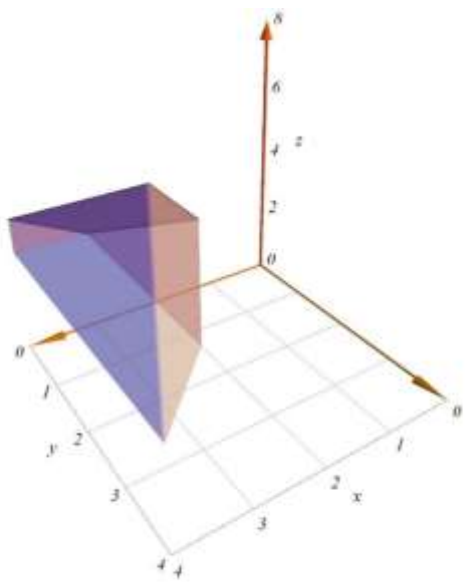

Figura 13. Aspecto de la superficie involucrada en el cálculo de la integral

Integrando respecto a x:

$$I = \int_{3}^{4}\int_{0}^{y}(x+y)dxdy = \int_{3}^{4}[x^2 + yx]_{0}^{y}dy$$

$$= \int_{3}^{4} 2y^2 dy$$

Integrando respecto a y:

$$I = \int_{3}^{4} 2y^2 dy = \left[\frac{2}{3}y^3\right]_3^4 = \frac{74}{3}$$

Ejemplo 5. (Integración con planteamiento vía Región Tipo I)

Calcula I $= \iint_R \; xy^2 dA$; donde R es la región en el primer cuadrante limitado por las curvas

$$\mathrm{y} = \sqrt{\mathrm{x}} \quad ; \quad \mathrm{y} = \mathrm{x}^3$$

Solución:

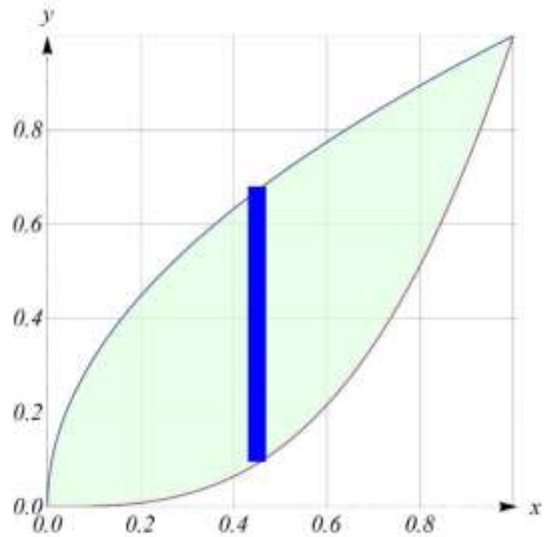

Figura 14. Aspecto de la región de integración

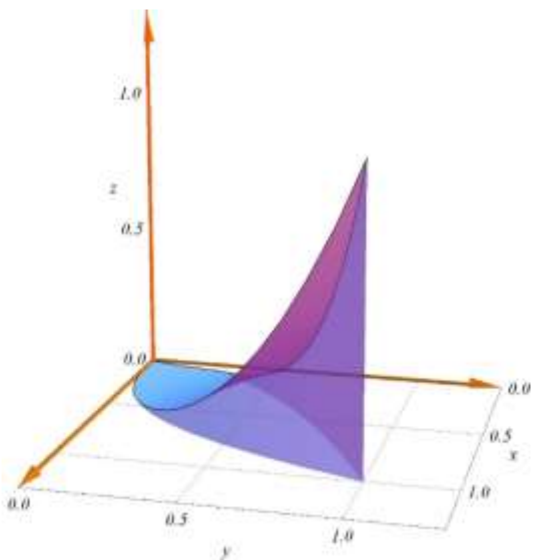

Figura 15. Aspecto de la superficie $z = xy^2$

En la Figura 14 se muestra la región de integración, de donde deducimos:

$$x^3 \leq y \leq \sqrt{x}$$

$$0 \leq x \leq 1$$

Integrando resulta:

$$I = \int_{0}^{1} \int_{x^3}^{\sqrt{x}} xy^2 dy dx$$

$$= \int_{0}^{1} \left[\frac{xy^3}{3}\right]_{x^3}^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{1} \left(x^{5/2} - x^{10}\right) dx = \frac{5}{77}$$

Ejemplo 6. (Integración con planteamiento vía Región Tipo II)

Calcula $\mathrm{I} = \iint_R (6x + 2y^2)dA$; donde R es la región limitada por las curvas $\mathrm{x} = \mathrm{y}^2$; $\mathrm{x} + \mathrm{y} = 2$.

Solución:

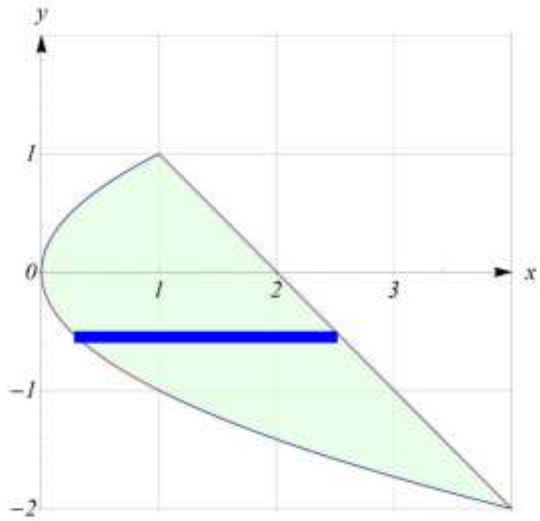

Figura 16. Aspecto de la región de integración

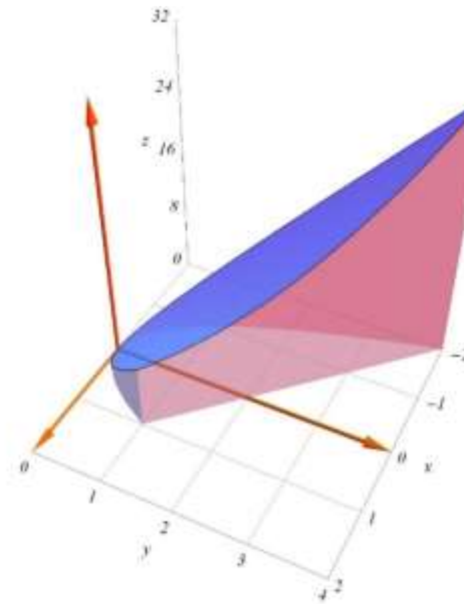

Figura 17. Aspecto de la superficie $z = 6x + 2y^2$

Sustituyendo $\boldsymbol{x}$ de la primera ecuación en la segunda tenemos:

$$\mathrm{y}^2 + \mathrm{y} = 2$$

De donde encontramos

$$y = -2; \mathrm{y} = 1$$

Entonces la región de integración (mostrada en la Figura 16) se describe como:

$$y^2 \leq x \leq 2 - y$$

$$-2 \leq \mathrm{y} \leq 1$$

Integrando resulta:

$$I = \int_{-2}^{1} \int_{y^2}^{2-y} (6\mathrm{x} + 2\mathrm{y}^2)\, dx\, dy$$

$$I = \int_{-2}^{1} \left(3x^2 + 2y^2x\right)_{y^2}^{2-y} dy$$

$$I = \int_{-2}^{1} (3(2-y)^2 + 2y^2(2-y) - 3y^4 - 2y^4)dy$$

$$I = \int_{-2}^{1} (12 - 12y + 7y^2 - 2y^3 - 5y^4)dy;$$

$$I = 12y - 6y^2 + \frac{7}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^4 - y^5\Big]_{-2}^{1};$$

$$I = \frac{41}{6} - \left(-\frac{128}{3}\right) = \frac{99}{2}$$

Ejemplo 7. (Selección adecuada del orden de integración)

Como hemos indicado, el orden de integración puede ser fundamental para el cálculo de una integral doble. En el siguiente ejemplo, un orden de integración resulta cómodo para llevar a cabo el proceso. Intentar el cálculo en orden inverso, no solo es difícil, es imposible en el sentido de que no es posible acceder a una respuesta mediante las llamadas funciones elementales. El ejercicio es el siguiente, calcular:

$$\iint_R e^{y/x} dA$$

Donde R es la región de integración limitada por la recta $y = x$; el eje x y la recta $x = 1$.

Solución:

La decisión sobre la elección de un orden de integración adecuado se da casi siempre por una consideración simultánea de la región de integración y la función que se integrará, sin embargo, no hay en el fondo reglas infalibles para ello. ¡No hay nada que sustituya la práctica! Para el caso presente, la región de integración puede ser descrita con suma facilidad tanto en formato de Región Tipo I como del Tipo II. Aquí, es determinante la expresión que integraremos. La experiencia sobre integración de una variable nos puede ayudar, en efecto, tal como está propuesta la integral no tiene un orden de integración establecido, nosotros lo elegimos. La decisión se debe hacer sobre la facilidad (incluso factibilidad) para integrar:

$$\int e^{y/x} dx \ \ o\ bien\ \int e^{y/x} dy$$

En la primera de estas posibilidades, x es variable; en la segunda y es la variable. Solo que resulta que en el primer caso, la integral es irresoluble en términos de funciones elementales, mientras que la segunda es razonablemente sencilla, solo requerimos un cambio de variable.

Por lo tanto, nos decidimos por la segunda alternativa, lo que hace que la región se considere del Tipo I. La siguiente figura muestra el planteamiento:

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{y/x} dy \right) dx$$

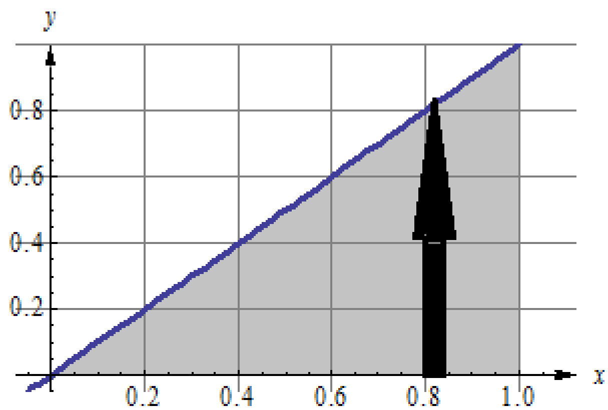

Figura 18. Descripción de la región del Ejemplo 7, una región Tipo I

Los cálculos ahora son relativamente sencillos:

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{y/x} dy \right) dx = \underbrace{\int_0^1 x \left(\int_0^x e^{y/x} \frac{dy}{x} \right) dx}_{u=\frac{y}{x} \to du = dy/x}$$

Observa que el cambio de variable y su correspondiente dy quedan justificados porque a "x" se le considera como a una constante. Continuamos el cálculo:

$$I = \int_0^1 x \left(\int_0^x e^{y/x} \frac{dy}{x} \right) dx = \int_0^1 x \left(e^{y/x} \Big|_{y=0}^{y=x} \right) dx$$

$$I = \int_0^1 x(e-1) dx = (e-1) \int_0^1 x\, dx = \frac{e-1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

Recordatorio: Como se ha indicado ya, una integral tal como la recién calculada integral del Ejemplo 7:

$$\iint_R e^{y/x} dA$$

No tiene un orden de integración preestablecido, se tiene la libertad de escoger el orden de integración más conveniente. En cambio, una integral doble expresada mediante integrales iteradas tal como:

$$I = \int_0^3 \int_{y^2}^9 y cos(x^2)\, dx\, dy$$

Ya tiene un orden establecido, en efecto, el orden de integración se realiza primero con respecto a la variable "x", luego con respecto a la variable "y". Como puede verse inmediatamente, este orden de integración nos llevaría a resolver (después de sacar "y" de la primera integral) la integral:

$$\int_{y^2}^9 cos(x^2)\, dx$$

Una integral que, nuevamente, resulta irresoluble en términos de funciones elementales. Resulta que antes de intentar mecanismos de cálculo más sofisticados (como métodos numéricos o el uso de algún tipo de software) es posible intentar su cálculo por medio de un cambio en el orden de integración. En el siguiente Ejemplo 8, ilustramos la técnica estándar para llevar a cabo este proceso. En términos generales, no hay garantías al respecto de que esto nos permitirá completar el cálculo analítico de la integral, pero cabe la posibilidad de que logremos destrabar la primera de las dos integrales iteradas, y entonces, tengamos la posibilidad de completar nuestro cálculo con mayor comodidad.

Ejemplo 8. (Intercambio del orden de integración)

Invierte el orden de integración para calcular la siguiente integral:

$$I = \int_0^3 \int_{y^2}^9 y cos(x^2)\, dx\, dy$$

Solución:

El método en realidad es simple. El intercambio de los límites de integración se apoya básicamente en el conocimiento que tengamos de la región de integración. Empezamos con la primera integral iterada (en la que estaremos considerando dos dimensiones), para luego entender el contenido de los límites de integración de la segunda integral a una dimensión.

De esta forma, establecemos para la primera variable de integración:

$$x = y^2; x = 9$$

Deseamos insistir en que en este momento estamos pensando en dos dimensiones, por lo tanto, $x = 9$ significa geométricamente una recta vertical y no un punto sobre la recta numérica. Después la variación de "y" sobre una dimensión, la interpretamos como $0 \leq y \leq 9$ sobre el propio eje "y". Con esta información, dibujamos la región de integración cuyo aspecto es como el de la Figura 19, una región de Tipo II.

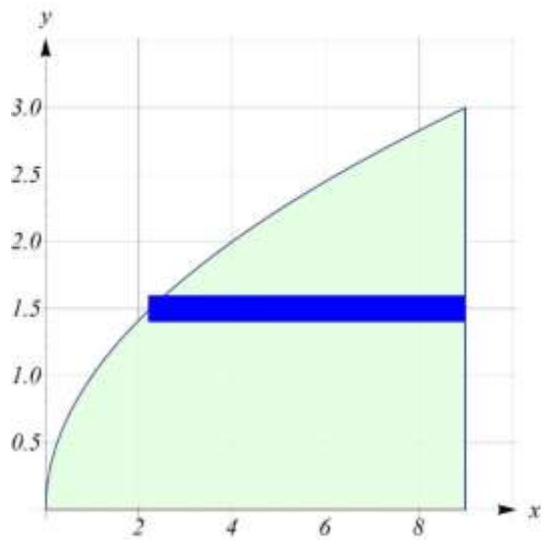

Figura 19. La región de integración como Tipo II

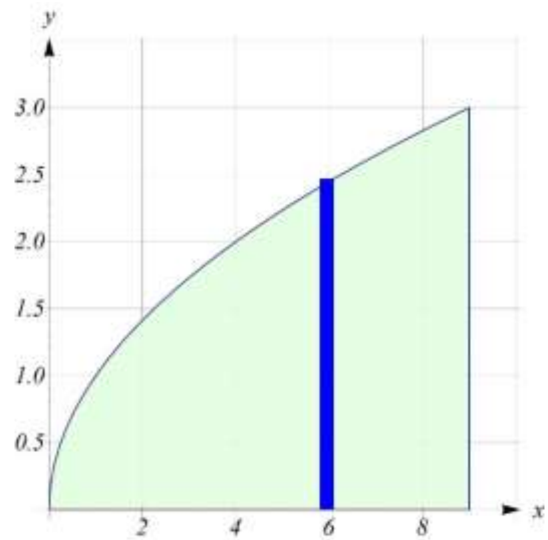

Figura 20. La región de integración como Tipo I

El intercambio del orden de integración nos obliga a realizar una "lectura" de la región de integración en otro orden. Hemos sombreado la región de integración tal y como leímos los límites de integración de la integral original. Ahora, leeremos la misma región, empezando con "y" para continuar con "x", lo que nos lleva a considerar la misma región, pero ahora como región Tipo I.

Sobra decir entonces que para el intercambio de los límites de integración no basta con intercambiar los símbolos $dxdy$ de posición. Seguramente al hacerlo de una manera tan simplista terminaríamos violando alguno de los principios que hemos establecido para el cálculo de integrales dobles. Tenemos:

$$I = \int_0^3 \int_{y^2}^9 ycos(x^2)\, dx\, dy = \int_0^9 \int_0^{\sqrt{x}} ycos(x^2)\, dy\, dx$$

Esto ha sido así porque la información $x = y^2$ la hemos reinterpretado como $y = \sqrt{x}$.

Estamos, en efecto, cambiando nuestra interpretación inicial de una región Tipo II a una de Tipo I. Continuando con los cálculos, hallamos:

$$I = \int_0^9 \int_0^{\sqrt{x}} ycos(x^2)\, dy\, dx = \int_0^9 cos(x^2) \int_0^{\sqrt{x}} y\, dy\, dx\,;$$

$$I = \int_0^9 cos(x^2) \left(\frac{y^2}{2} \Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^9 cos(x^2) x\, dx\,;$$

Si ahora hacemos el cambio de variable $u = x^2 \to du = 2x\, dx$. Por lo tanto:

$$I = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} \int_0^9 cos(x^2)[2\, x\, dx] = \frac{1}{4} sen(x^2)|_0^9\,;$$

$$I = \frac{1}{4}(sen81 - sen0) = \frac{1}{4} sen81 \approx -0.157472$$

Ejemplo 9. (Intercambio del orden de integración)

Calcula la siguiente integral cambiando el orden de integración

$$I = \int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2}\, dxdy$$

Solución:

Observa que $\int e^{-x^2} dx$ no es integrable por métodos elementales de integración. El orden dado considera la región de integración como región Tipo II, ver Figura 21.

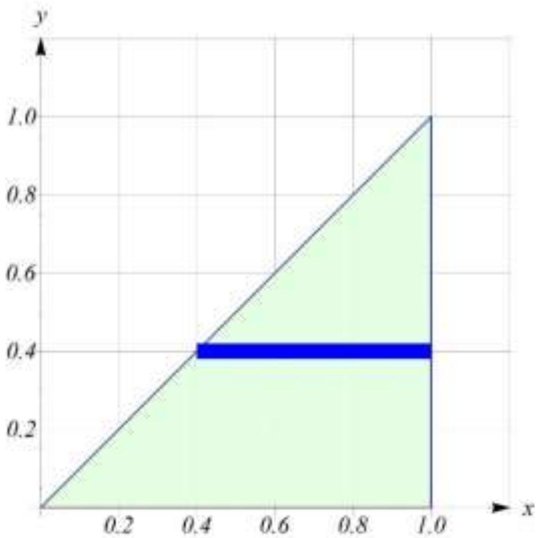

Figura 21. Región de integración con formato Tipo II

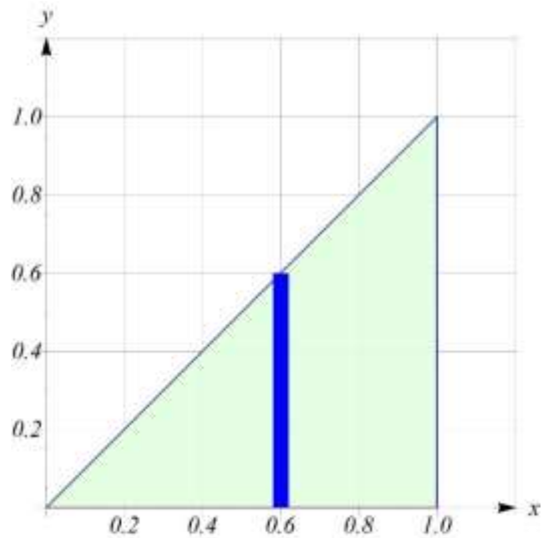

Figura 22. Región de integración con formato Tipo I

Considerando la región como Tipo I (ver Figura 22), los límites quedan determinados por:

$$0 \leq y \leq x;\;\; 0 \leq x \leq 1$$

Integrando:

$$I = \int_0^1 \int_0^x e^{-x^2}\, dydx = \int_0^1 e^{-x^2} y\Big]_0^x\, dx = \int_0^1 xe^{-x^2} dx;$$

$$I = -\frac{1}{2} e^{-x^2}\Big]_0^1 = -\frac{1}{2}(e^{-1} - 1)$$

Ejemplo 10. (Intercambio del orden de integración)

Calcula la siguiente integral cambiando el orden de integración

$$I = \int_{0}^{1} \int_{x^2}^{1} x^3 \mathrm{sen}(y^3)\, dydx$$

Solución:

Observa que $\int \mathrm{sen}(y^3) dy$ no es integrable por métodos elementales de integración. El orden de integración dado considera la región de integración como región Tipo I, ver Figura 23.

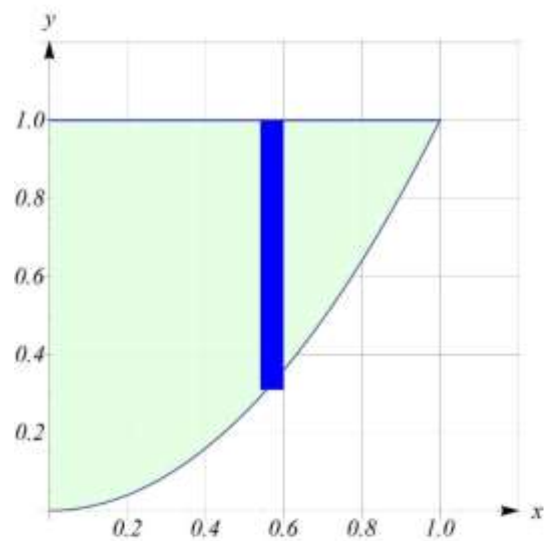

Figura 23. Región de integración con formato Tipo I

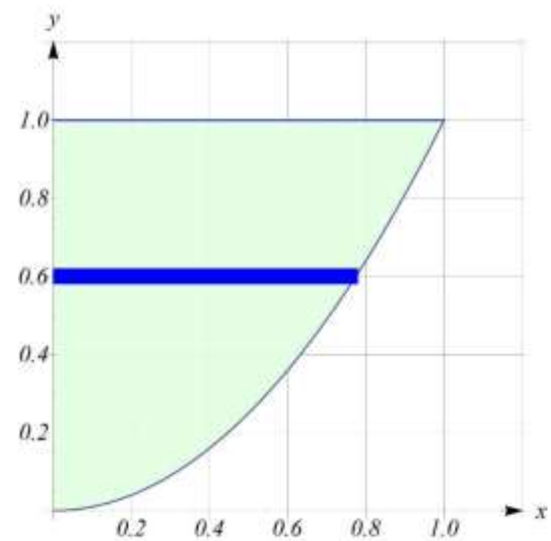

Figura 24. Región de integración con formato Tipo II

Considerando la misma región como tipo II (ver Figura 24), obtenemos que los límites de integración son: $0 \leq x \leq \sqrt{y}$; $0 \leq y \leq 1$.

Integrando:

$$I = \int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{y}} x^3 \mathrm{sen}(y^3)\, dxdy = \int_{0}^{1} sen(y^3) \frac{x^4}{4}\Big]_{0}^{\sqrt{y}} dy;$$

$$I = \frac{1}{4} \int_{0}^{1} y^2 sen(y^3)\, dy;$$

$$I = -\frac{\cos(y^3)}{12}\Big]_{0}^{1};$$

$$I = \frac{1}{12}(1 - \cos(1)) \approx 0.0383081$$

Ejemplo 11.

Calcula el volumen del sólido limitado por los planos coordenados y el plano

$$3x + 2y + z = 6$$

Solución:

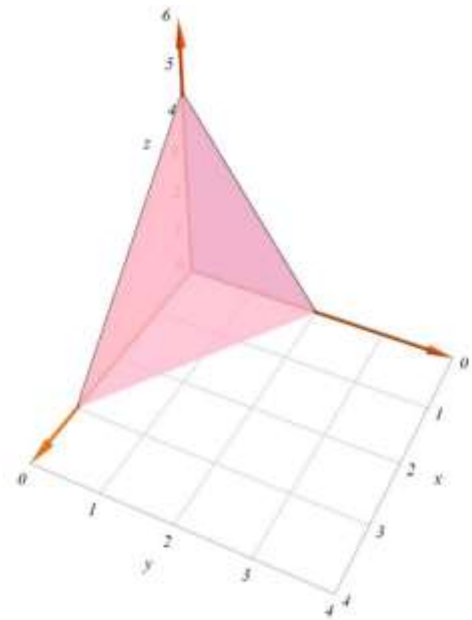

Figura 25. Aspecto del sólido del Ejemplo 11

La región sobre el plano xy está limitada por $0 \leq y \leq \frac{6-3x}{2}$; $0 \leq x \leq 1$. El volumen del sólido está dado por:

$$\int_0^2 \int_0^{\frac{6-3x}{2}} (6 - 3x - 2y)dydx = 6$$

Cálculo de Áreas Planas. Ejemplo

Una aplicación básica de la integral doble tiene que ver con el cálculo de áreas planas (esto será un enfoque alternativo al ya discutido en integración de una variable). Lo que discutiremos a continuación tiene un mensaje general: aunque el planteamiento inicial de nuestra discusión sobre integral doble giró en torno al cálculo de volúmenes, esto no es limitativo. Como veremos ahora, según sea lo que integremos es la interpretación o aplicación que logremos. Para lo que sigue consideraremos un caso especial de la función por integrar sobre una región R. De manera concreta, tomaremos a continuación como función por integrar la función idénticamente igual a 1 sobre la región R. Si, por ejemplo, R es una región Tipo I, tenemos:

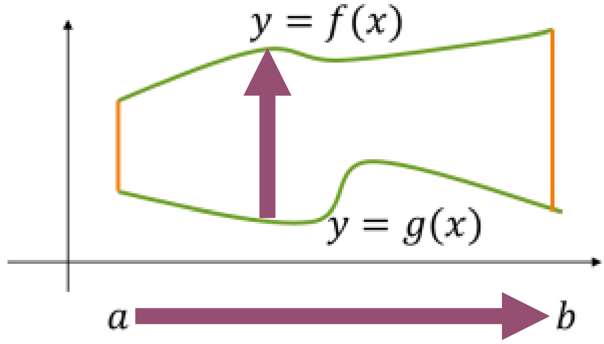

Figura 26. La integral doble para el cálculo del área de una región plana

$$\iint_R 1\,dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} 1\,dy\,dx = \int_a^b y|_{g(x)}^{f(x)} dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = área(R)$$

Por lo tanto:

$$área(R) = \iint_R 1\,dx\,dy$$

Ejemplo 12. (Cálculo de áreas planas)

Utilice una integral doble para calcular el área de la región limitada por:

$$y = x^2 + 1; \quad y = 2x^2 - 3$$

Solución:

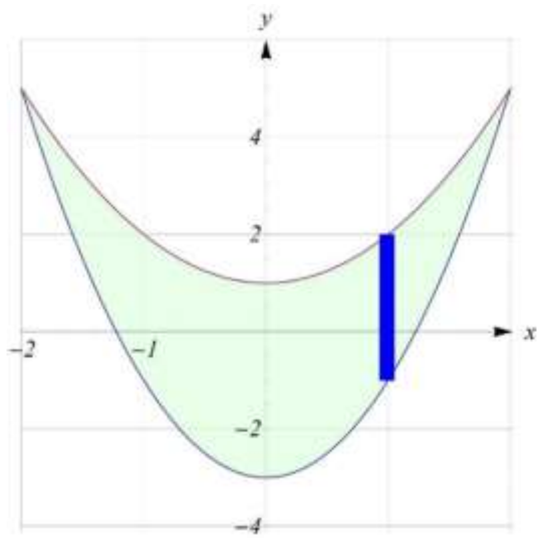

Figura 27. Aspecto de la región plana del Ejemplo 12

Igualando las ecuaciones tenemos:

$$y = x^2 + 1 = 2x^2 - 3$$

De donde: $x = -2$ y $x = 2$. La región se describe como:

$$2x^2 - 3 \leq y \leq x^2 + 1$$

Entonces, el área de la región es:

$$A = \int_{-2}^{2} \int_{2x^2-3}^{x^2+1} dydx = \int_{-2}^{2} \left(x^2 + 1 - (2x^2 - 3)\right)dx$$

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\mathrm{d}x = 4\mathrm{x} - \frac{\mathrm{x}^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$$

Integral triple. Ejemplos

Es conveniente por las aplicaciones en diversos campos (como el electromagnetismo o la mecánica) extender el concepto de integración doble a una dimensión más, al hacerlo obtenemos el concepto de triple integral. Las ideas en el fondo son las mismas que se han descrito para el caso de la integral doble. Lo más importante en este nivel de ideas continúa siendo la descripción de regiones de integración, ahora tridimensionales. Sin embargo, los principios de descripción de regiones y la forma como éstos llevan a los límites de integración en la integración múltiple siguen siendo los mismos. Por ejemplo, si una región se describe mediante:

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x, y) \leq z \leq h_1(x, y), g_2(x) \leq y \leq h_2(x), a \leq x \leq b\}$$

Entonces:

$$\underbrace{I = \iiint_R f(x, y, z)dV = \iiint_R f(x, y, z)dxdydz}_{No\ hay\ orden\ de\ integración\ preestablecido}$$

$$I = \int_a^b \left(\int_{g_2(x)}^{h_2(x)} \left(\int_{g_1(x,y)}^{h_1(x,y)} f(x, y, z)\, dz\right) dy\right) dx$$

Los paréntesis sugieren el orden que se ha establecido para el cálculo de las integrales iteradas: primero con respecto a "z", luego con respecto a "*y*"; finalmente con respecto a "*x*". Cabe señalar que, como ocurrió con la doble integral, el orden indicado aquí no es el único posible.

Ejemplo 13. (Triple integral)

Calcula la integral:

$$I = \iiint_R x\, dV$$

Sobre la región del plano delimitado por:

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4 - x^2, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq 2\}$$

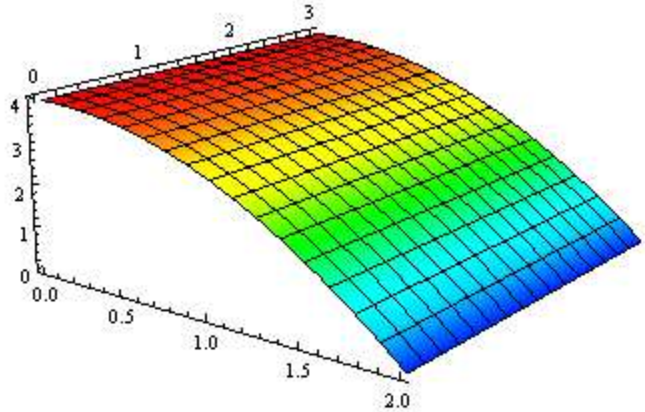

Figura 28. Región de integración (tridimensional) del Ejemplo 13.

Solución:

Nuestro cálculo es el siguiente:

$$I = \int_0^2 \int_0^3 \int_0^{4-x^2} x \, dz \, dy \, dx = \int_0^2 \int_0^3 x \int_0^{4-x^2} dz \, dy \, dx\,;$$

$$I = \int_0^2 \int_0^3 x(4 - x^2) \, dy \, dx = \int_0^2 x(4 - x^2) \int_0^3 dy \, dx;$$

$$I = \int_0^2 3\, x(4 - x^2) \, dx = 12$$

Tal y como ocurrió con la integral doble y el cálculo de áreas planas, podemos obtener una interpretación similar para la triple integral que se relacionará con el cálculo de volúmenes de regiones tridimensionales cerradas. En efecto, tenemos:

$$V(R) = \iiint_R 1 \, dV = \iiint_R 1 \, dxdydz$$

Ejemplo 14. (Volumen vía triple integral)

Calcule el volumen del sólido limitado por los planos coordenados y el plano

$$3x + 2y + z = 6$$

(Compara con el Ejemplo 11)

Solución:

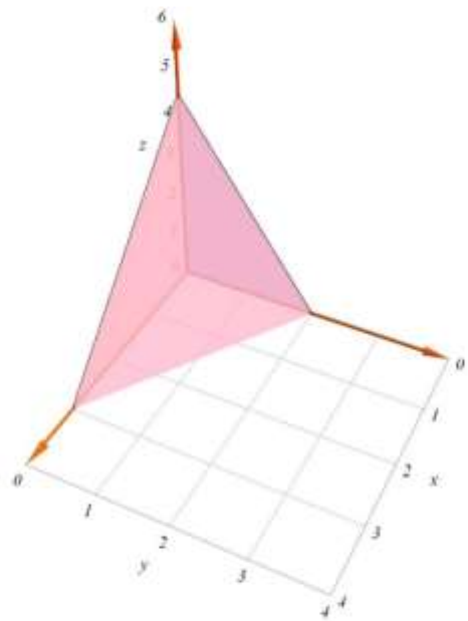

Figura 29. Región tridimensional cerrada. Cálculo de su volumen vía triple integral

Despejamos la variable "z" de la ecuación del plano, obtenemos $z = 6 - 3x - 2y$. Luego la recta que se observa sobre el plano "xy" resulta de la intersección del plano dado con el plano "xy", donde $z = 0$.

La recta es $3x + 2y = 6$. Al despejar "y", obtenemos como antes $0 \leq y \leq \frac{6-3x}{2}$. Por lo tanto:

$$V(R) = \iiint_R 1\, dV = \int_0^2 \int_0^{\frac{6-3x}{2}} \int_0^{6-3x-2y} dz\, dy\, dx\, ;$$

$$V(R) = \int_0^2 \int_0^{\frac{6-3x}{2}} (6 - 3x - 2y)\, dy\, dx = 6$$

Por supuesto, tal y como ocurrió en el Ejemplo 11, hemos obtenido el mismo resultado. Cabe la pregunta al respecto de lo que aporta este enfoque para el cálculo de un volumen. La respuesta está ligada al cambio de coordenadas. Es común que para muchos sólidos sea más simple plantear el cálculo de su volumen con el enfoque de una triple integral porque después, al hacer un cambio de variable, completar el cálculo en el nuevo sistema se convierte en una tarea simple. Esto, sin embargo, no está comprendido en este enfoque básico.

Otras aplicaciones: Cálculo de la masa y centro de masa. Ejemplos

Las aplicaciones de la integral doble o triple distan mucho de limitarse al cálculo de áreas o volúmenes; ejemplo de esta afirmación está en el problema de introducción a esta unidad.

Cerramos esta unidad con una aplicación básica de la mecánica, a saber, el cálculo del centro de masa de una placa delgada, condición que nos garantiza un enfoque bidimensional. Si en diversos puntos de la placa con coordenadas $x_1, x_2, \dots, x_n$ están distribuidas sendas masas $m_1, m_2, \dots, m_n$, entonces el centro de masa de este sistema es el vector que satisface:

$$\vec{x} = (\bar{x}, \bar{y}) = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

Para generalizar esta idea, supongamos que una masa M se distribuye sobre una región acotada R. Si $\sigma = \sigma(x, y)$ denota la función de densidad, es decir, la masa por unidad de área, entonces:

$$M = \iint_R \sigma(x, y)\, dx\, dy$$

El centro de masa se define (hay razones de peso para ello por supuesto), mediante las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$, donde:

$$M\bar{x} = \iint_R x\, \sigma(x, y)\, dx\, dy$$

$$M\bar{y} = \iint_R y\, \sigma(x, y)\, dx\, dy$$

Cuando la función de densidad de masa σ es constante, el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ se llama centroide de la región R.

Ejemplo 15. (Centro de masa)

Una región plana R (delgada) tiene una forma como la que se muestra en la siguiente Figura 30 (sombreada), limitada por $y = 0; x = 1; y = e^{2x}; x = 0$. Si la densidad de la placa es proporcional a la distancia con respecto al eje x, determina la masa y el centro de masa de la placa.

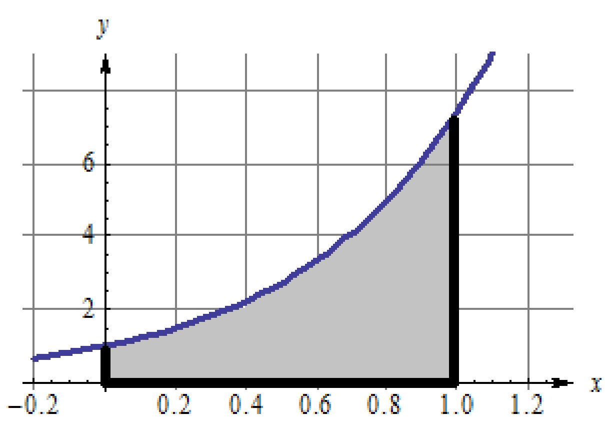

Figura 30. Cálculo del centro de masa de una región plana delgada

Solución:

Que la densidad de la placa sea proporcional a la distancia con respecto al eje *x*, significa que $\sigma(x,y) = ky$. Por lo tanto, la masa es:

$$M = \iint_R \sigma(x,y)dA = \int_0^1 \int_0^{e^{2x}} ky\, dy\, dx;$$

$$M = k\int_0^1 \frac{y^2}{2}\bigg|\begin{matrix} y = e^{2x} \\ y = 0 \end{matrix}\, dx = \frac{k}{2}\int_0^1 e^{4x}\, dx = \frac{k}{8}(e^4 - 1)$$

De manera semejante se realizan los siguientes cálculos:

$$M\bar{x} = k\int_0^1 \int_0^{e^{2x}} x\, y\, dy\, dx = \frac{k}{32}(1 + 3e^4)$$

$$M\bar{y} = k\int_0^1 \int_0^{e^{2x}} y\, y\, dy\, dx = k\int_0^1 \int_0^{e^{2x}} y^2\, dy\, dx = \frac{k}{18}(e^6 - 1)$$

Por lo tanto,

$$\bar{x} = \frac{\frac{k}{32}(1 + 3e^4)}{\frac{k}{8}(e^4 - 1)} = \frac{1 + 3e^4}{4(e^4 - 1)} \approx 0.76866$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{k}{18}(e^6 - 1)}{\frac{k}{8}(e^4 - 1)} = \frac{4(e^6 - 1)}{9(e^4 - 1)} \approx 3.337$$

Ejercicios y problemas

En los ejercicios 1-4, elabora el dibujo de la región limitada por las curvas indicadas, luego descríbela.

1. $y = -x, y = 2 - x^2$

   Respuesta: $R = \{(x,y)\varepsilon\mathbb{R}^2: -x \le y \le 2 - x^2, -1 \le x \le 2\}$

2. $y = 0,\ y = x - 2,\ y = \sqrt{x}$

   Respuesta: $R = \{(x,y)\varepsilon\mathbb{R}^2: y^{\,2} \le x \le y + 2, 0 \le y \le 2\}$

3. $x^2 - y = 0, x + y - 2 = 0$

   Respuesta: $R = \left\{(x,y)\varepsilon\mathbb{R}^2 \colon \sqrt{y} \le x \le 2 - y, 0 \le y \le 1\right\}$

4. $y = arccosx, x = 0, y = 1$

   Respuesta: $R = \{(x,y)\varepsilon\mathbb{R}^2 \colon arccos\ x \le y \le 1, -1 \le x \le 0\}$

Para los ejercicios 5-7 calcula las siguientes integrales.

5. $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} dydx$

   Respuesta: $\frac{1}{6}$

6. $\int_1^2 \int_y^{3y} (x+y)dxdy$

   Respuesta: 14

7. $\int_0^{\pi} \int_0^{cos\theta} \rho sen\theta\ d\rho d\theta$

   Respuesta: $\frac{1}{3}$

8. Calcula $\iint\limits_R (x^2 + y^2)dA$, donde $R = \{(x,y) : 1 \le y \le x^2, 1 \le x \le 2\}$.

   Respuesta: $I =$1006/105

9. Encuentra el valor de $\int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right\} dx$.

   Respuesta: $I = \frac{1}{2}$

10. Determina $\int_1^e \int_0^{\ln(x)} y\, dy\, dx$.

    Respuesta: $I = (e-2)/2$

11. Dada $\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y)dxdy$. Calcula el valor de la integral.

    Respuesta: $I = 241/60$

12. Halla $\iint_R \; dA$ siendo R la región del primer cuadrante limitada por la parábola cúbica $y^2 = x^3$ y la recta $y = x$. La recta y la parábola se cortan en los puntos (0,0) y (1,1), que son los valores extremos de x e y en la región R.

    Respuesta: $\frac{1}{10}$

13. Encuentra el valor de la integral $\int_0^{2\pi} \int_0^{1-cos\theta} r^3 cos^2\theta \; drd\theta$.

    Respuesta: $\frac{49}{32}\pi$

14. Encuentra la integral de la siguiente función $xcos(x + y)$, sobre el triángulo cuyos vértices son (0,0), (π,0), (π, π).

    Respuesta: $\frac{-3\pi}{2}$

15. Determina la integral de la siguiente función sobre la región indicada $f(x, y) = x^2$; sobre la región limitada por $y = x, \;\; y = 2x, \;\;\; x = 2.$

    Respuesta: 4

16. Halla $\iint_R \; dA$ siendo R la región comprendida entre $y = 2x$ & $y = x^2$, situada a la izquierda de $x = 1$.

    Respuesta: $\frac{2}{3}$

17. Halla $\iint_R \; x^2 dA$ siendo R la región del primer cuadrante limitada por la hipérbola $xy = 16$ y las rectas $y = x$, $y = 0$ & $x = 8$.

    Respuesta: 448

18. Halla $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dxdy$ invirtiendo, previamente, el orden de integración.

    Respuesta: $\frac{1}{6}(e^9 - 1)$

19. Invierte los límites de integración en la siguiente integral $\int\limits_0^5 \int\limits_0^{e^{5x}} f(x, y)dydx$.

    Respuesta: $\int\limits_0^1 \int\limits_0^5 f(x, y)dxdy + \int\limits_1^{e^{25}} \int\limits_{\ln y/5}^5 f(x, y)dxdy$

20. Intercambia del orden de integración para calcular $\int\limits_0^2 \int\limits_{y^2}^4 y\cos(x^2)dxdy$.

    Repuesta: $I = \text{sen}(16)/4$

21. Determina el volumen del sólido limitado por las superficies: $x^2 + y^2 = 16$ & $x^2 + z^2 = 16$.

    Respuesta: $V = \frac{1024}{3}$

22. Encuentra por integración doble el volumen del tetraedro limitado por y los planos coordenados (supón que *a*, *b* y *c* son positivos).

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

    Respuesta: $V = \frac{abc}{6}$

23. Encuentra el volumen de la región limitada por $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x = -a$, $x = a$, $y = -a$, $y = a$.

    Respuesta: $V = 8a^4/3$

24. Halla el volumen del espacio comprendido debajo del plano $x + z = 2$, arriba de $z = 0$ y adentro de $x^2 + y^2 = 4$.

    Respuesta: 8π

25. Determina el volumen limitado arriba por $x + z = 4$, abajo por $z = 0$ y lateralmente por $y^2 = 4x$.

    Respuesta: $\frac{512}{15}$

26. Determina el volumen del sólido encerrado por el elipsoide con ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

    Respuesta: $V = \frac{4\pi}{3}\,abc$

27. Halla el valor de la siguiente integral:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-x} xyz \, dz \, dy \, dx$$

    Respuesta: $\frac{13}{240}$

28. Calcula el valor de la siguiente integral:

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^2 z \, \rho^2 \, sen \, \theta \, dz \, d\rho \, d\theta$$

    Respuesta: $\frac{2}{3}$

29. Determina el valor de la siguiente integral.

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{sec\phi} sen2\phi \; d\rho \; d\phi \; d\theta$$

Respuesta: $\left(2-\sqrt{2}\right)\pi$

30. Halla la triple integral de la función $f(x, y, z) = z$ extendida a la región R del primer octante limitada por los planos $y = 0; z = 0; x + y = 2; 2y + x = 6$ y el cilindro $y^2 + z^2 = 4$.

Respuesta: $\frac{26}{3}$

En los Ejercicios 31-34, determina el centro de masa según la información que se proporcione. En cada caso supón que la densidad es uniforme e igual a 1.

31. La parte del primer cuadrante situada en el disco de radio 1.

Respuesta: $\bar{x} = \frac{4}{3\pi};\ \bar{y} = \frac{4}{3\pi}$

32. El triángulo cuyos vértices son $(0,0), (3,0), (0,5)$.

Respuesta: $(1, 5/3)$

33. La región encerrada por la parábola $y = 6x - x^2; y = x$.

Respuesta: $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$

34. La región encerrada por las parábolas $y = 2x - x^2; y = 3x^2 - 6x$.

Respuesta: $(1, -415)$