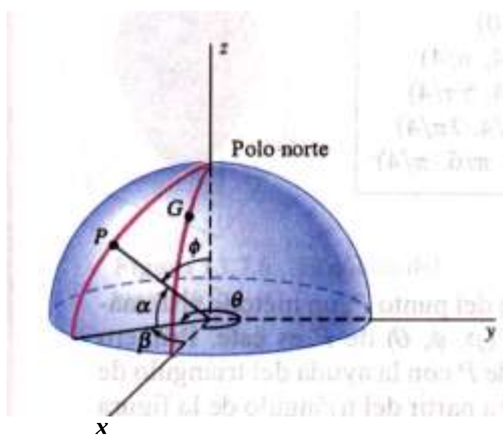
MÁS SOBRE SUPERFICIES. APLICACIONES DE LAS COORDENADAS ESFÉRICAS Y CILÍNDRICAS

I. Coordenadas esféricas. HACIA LA MENOR DISTANCIA REAL. GEODÉSICAS.

Cuando hablamos de una distancia entre un lugar y otro, generalmente pensamos en líneas rectas; esto representa una buena aproximación si se trata de distancias pequeñas. Sin embargo, si la distancia a considerar es “grande” debemos tomar en cuenta que en realidad la Tierra no es plana sino esférica, así que nuestras medidas de distancia, más que realizarlas sobre rectas debieran realizarse utilizando arcos de circunferencia sobre la superficie terrestre, pues bien, a estos arcos se les conoce como **geodésicas**. Hoy calcularán distancias sobre estos arcos apoyándose sobre lo que han aprendido hasta hoy.

Con más precisión, una geodésica en una superficie esférica es un arco de circunferencia formada por la intersección de la esfera con un plano que pasa por el centro de la esfera. Por lo tanto, una geodésica de una superficie esférica es una circunferencia o un arco de ella que tiene el mismo radio que la esfera. Como podrán observar fácilmente, cualesquiera dos puntos en una superficie esférica están en una geodésica (que está determinada de manera única, excepto cuando los dos puntos están en los extremos de un diámetro de la esfera). También estarán de acuerdo en que la distancia más corta entre dos puntos sobre una esfera, medida sobre la superficie curva, está dada por el menor de los arcos de la geodésica que los contiene.

Antes de entrar a nuestra actividad necesitan conocer alguna información sobre la latitud y la longitud de los puntos sobre la superficie de la tierra. Las coordenadas esféricas ϕ y θ están íntimamente relacionadas con la latitud y la longitud. Comenzamos con el **meridiano principal** (un meridiano es una geodésica que une los dos polos) que pasa por Greenwich, Inglaterra -léase la historia para comprender por qué es éste el principal y no otro. Éste es el punto G marcado en la siguiente figura



Consideramos que el eje *z* pasa por el polo norte y el eje *x* por el punto donde el meridiano principal intersecta al ecuador. La latitud α y la longitud (oeste) β de un punto *P* en el hemisferio norte cumplen las siguientes ecuaciones:

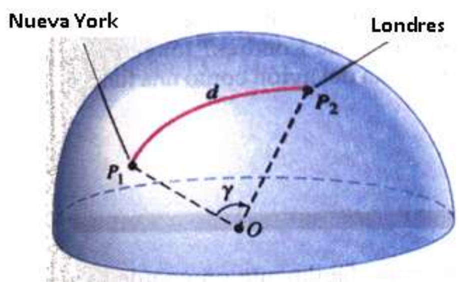
$$\alpha = 90^0 - \phi^0 \quad \& \quad \beta = 360^0 - \theta^0$$

donde ϕ^0 & θ^0 son las coordenadas esféricas angulares, medidas en grados desde P (es decir, ϕ^0 y θ^0 denotan los equivalentes en grados de los ángulos ϕ y θ , respectivamente, que se miden en radianes a menos que se especifique lo contrario). Así, la latitud α se mide hacia el norte del ecuador y la longitud β se mide hacia el oeste del meridiano principal.

UN CASO CONCRETO: LA DISTANCIA ENTRE NUEVA YORK Y LONDRES

Su problema en esta parte será determinar la distancia entre estas dos ciudades según la geodésica que las une.

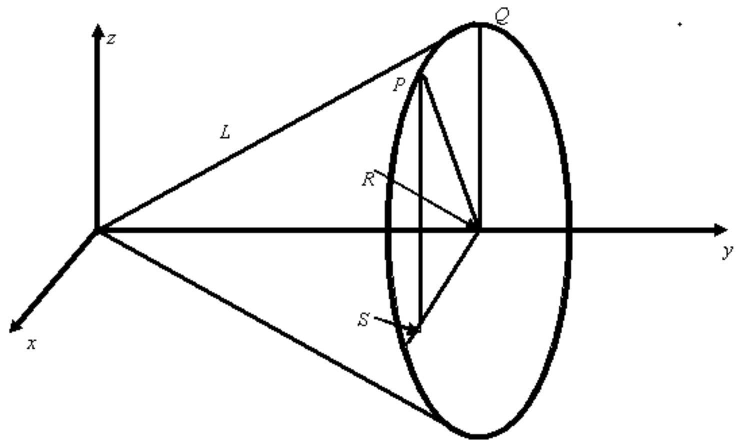
a) Investiguen las latitudes y longitudes de ambas ciudades.
b) ¿Qué valores (en grados) tienen ϕ^0 & θ^0?
c) Encuentren las coordenadas esféricas de los puntos P_1 & P_2 que representan a Nueva York y Londres respectivamente. Necesitarán el radio de la tierra, para esto consideren la media aritmética de los radios polar y ecuatorial.
d) Ahora determinen las coordenadas cartesianas de los puntos P_1 & P_2 .
e) Sea O el centro de la tierra, consideren los vectores $\mathbf{OP_1}$ & $\mathbf{OP_2}$ y determinen el ángulo formado por ambos vectores. ¿Por qué creen que nos resultará útil dicho ángulo?
f) Con el ángulo encontrado en el inciso anterior estarán listos para encontrar la distancia entre Nueva York y Londres. ¿Cuánto vale esta distancia?



II. Coordenadas cilíndricas. OBJETOS TORNEADOS

Una forma en la que se puede generar una superficie es rotando una curva plana C alrededor de una recta L en su plano. Esto produce una **superficie de revolución** con eje L. Por ejemplo, una esfera puede generarse rotando una circunferencia alrededor de uno de sus diámetros. Veamos esta idea con más detalle para un caso concreto.

a) Consideren la parte de la recta "L" con ecuación $z = y/2$ que se encuentra en el primer cuadrante del plano yz.



Supongamos ahora que L gira alrededor del eje y. Queremos hallar una ecuación que exprese cuándo el punto $P(x, y, z)$ está sobre la superficie de rotación (la cual evidentemente en este caso es un cono). Para pensar: el punto P proviene de hacer girar un punto Q sobre la recta L. ¿Cómo son las coordenadas "y" de P & Q? ¿Cuál es la coordenada "x" de Q? Para hallar la coordenada "z" de Q observa que $QR = PR$. ¿Cuál es la coordenada "z" de Q?

b) Dado que el punto Q está sobre la recta L, ¿qué relación encuentran entre sus coordenadas?

c) ¿Qué superficie obtuvieron? Descríbanla e indiquen cómo son sus curvas de nivel.

d) Reflexionen en el proceso seguido en este problema y busquen una manera concisa y clara de explicar ¿cómo obtener una superficie de revolución?

e) Generalicen lo que han descrito en el inciso anterior, para indicar cómo son las superficies de nivel en otras situaciones. Por ejemplo, ¿cómo hallar la superficie que genera una curva $f(x, y) = 0$ que gira en torno al eje y?, y ¿si se tratara de una curva $f(y, z) = 0$ girando en torno al eje z?

III. Una superficie de revolución en torno del eje z se describe fácilmente en coordenadas cilíndricas.

a) Supón que la curva $r = f(z)$, $a \le z \le b$ gira en torno al eje z. ¿Cuáles son las coordenadas cilíndricas de cualquier punto P sobre esta superficie?

b) Usarás ahora Mathematica para graficar una superficie de revolución como ésta. Para ello basta que utilices el comando ParametricPlot3D con las expresiones halladas en a). Grafica la superficie de revolución obtenida por la rotación de $r = \text{sen}(z); 0 \le z \le \pi$.

c) Finalmente, grafica la superficie de revolución obtenida por la rotación de $r = f(z)$, $0 \le z \le 19$, alrededor del eje z, donde:

$$f(z) = \begin{cases} 8 - z, 0 \le z \le 2 \\ 14 - 4z, 2 \le z \le 3 \\ 5, 3 \le z \le 18 \\ 39 - 2z, 18 \le z \le 19 \end{cases}$$

NOTA: la función $f(z)$ se define previamente en Mathematica, con el comando:

f [z_]:=Which[0<=z<=2,8-z, etc.]