

Indicaciones:

- Este quiz consta de 5 reactivos, cada uno con un valor de 20 puntos.
- Cada ejercicio debe tener procedimiento **ordenado y completo** que justifique adecuadamente la respuesta dada.
- **Si falta el procedimiento** o éste no justifica la respuesta, **entonces el problema vale 0 puntos** aunque la respuesta sea correcta.
- No olvides identificar el ejercicio e inciso que estás resolviendo.
- Cualquier intento de fraude amerita **DA**.

1. Si $f(x, y, z) = yz^4 \operatorname{sen} x + \frac{z}{x+2y}$, determina la derivada direccional de f en $P_0 = (1, 1, 2)$ en la dirección del vector $\vec{A} = (-1, 2, -2)$. **Cuida que tu calculadora se encuentre en modo radianes.**

SOLUCIÓN:

Calculamos primero el vector unitario requerido:

$$\hat{u} = \frac{(-1, 2, -2)}{\sqrt{1+4+4}} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Las derivadas parciales para construir el vector gradiente en el punto indicado quedan:

$$f_x(1, 1, 2) = yz^4 \cos x - \frac{z}{(x+2y)^2} \Big|_{(1, 1, 2)} = 8.423$$

$$f_y(1, 1, 2) = z^4 \operatorname{sen} x - \frac{2z}{(x+2y)^2} \Big|_{(1, 1, 2)} = 13.02$$

$$f_z(1, 1, 2) = 4yz^3 \operatorname{sen} x + \frac{1}{x+2y} \Big|_{(1, 1, 2)} = 27.26$$

Entonces:

$$D_{\hat{u}} f(1, 1, 2) = \nabla f(1, 1, 2) \cdot \hat{u} = (8.423, 13.02, 27.26) \cdot \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = -12.301$$

2. Considera la superficie $y^2 + z^2 e^{z-x} = 5$.
- Determina su linealización en el punto $(1, 2, 1)$.
 - Si $z = f(x, y)$, obtén un valor aproximado de z si $x = 0.81, y = 2.23$.

SOLUCIÓN:

- Utilizamos la fórmula $\nabla F(\vec{P}_0) \cdot (\vec{P} - \vec{P}_0) = 0$. Calculamos el gradiente:

$$F_x(\vec{P}_0) = -z^2 e^{z-x} |_{\vec{P}_0} = -1$$

$$F_y(\vec{P}_0) = 2y |_{\vec{P}_0} = 4$$

$$F_z(\vec{P}_0) = z^2 e^{z-x} + 2z e^{z-x} |_{\vec{P}_0} = 3$$

Entonces:

$$(-1, 4, 3) \cdot (x - 1, y - 2, z - 1) = 0;$$

$$\text{Tenemos: } -x + 1 + 4y - 8 + 3z - 3 = 0 \rightarrow -x + 4y + 3z = 10$$

Al despejar "z", obtenemos la linealización de la superficie, ésta es:

$$L(x, y) = \frac{x - 4y + 10}{3}$$

b) Con base en el resultado de a), hallamos:

$$f(0.81, 2.23) \approx L(0.81, 2.23) = \frac{0.81 - 4(2.23) + 10}{3} = 0.63$$

3. Encuentra y analiza **TODOS** los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = 11x^2 - 2xy + 2y^2 + 3y$$

SOLUCIÓN:

Primero determinamos los puntos críticos, establecemos el sistema:

$$\begin{cases} f_x = 22x - 2y = 0 \dots (1) \\ f_y = -2x + 4y + 3 = 0 \dots (2) \end{cases}$$

Por (1), obtenemos $y = \frac{22x}{2} = 11x$. Al sustituir en (2) encontramos:

$$-2x + 4(11x) + 3 = 0 \rightarrow 42x = -3 \rightarrow x = -\frac{3}{42} = -\frac{1}{14}$$

Para "y", encontramos que $y = 11x = -\frac{11}{14}$. Por lo tanto el único punto crítico es:

$$P\left(-\frac{1}{14}, -\frac{11}{14}\right)$$

Calculamos ahora el discriminante para aplicar el criterio que determine la naturaleza del punto crítico. Tenemos:

$$f_{xx} = 22; f_{yy} = 4; f_{xy} = -2$$

Entonces:

$$D(x, y) = 22(4) - (-2)^2 = 84 > 0$$

Llama la atención que el discriminante no dependa de las variables y haya quedado constante. En estos casos, propiamente, **NO REQUERIMOS EVALUAR**, el signo buscado es el signo de la misma constante. En nuestro caso el signo es positivo, por lo tanto podríamos tener un máximo o un mínimo en el punto crítico. El resto del criterio debe considerar el signo de f_{xx} que también resultó una constante, razón por la cual NO será necesario evaluar, el signo requerido es el de la misma constante. Como $f_{xx} = 22 > 0$, concluimos que el punto crítico en cuestión (que por cierto nunca utilizamos para evaluar) corresponde a un MÍNIMO de la función.

4. Determina los extremos de la función $f(x, y) = x^2y + x + y$ sujeta a la condición $xy = 4$.

AYUDA: Establece el sistema de ecuaciones asociado al problema. Despeja “y” de la última ecuación, sustituye en la primera. Despeja el multiplicador de Lagrange, sustituye en la segunda. De esto hallarás el valor de “x”, de esto se desencadenan las soluciones del sistema.

SOLUCIÓN:

Establecemos el Lagrangiano:

$$F(x, y, m) = x^2y + x + y + m(xy - 4)$$

Luego el sistema:

$$\begin{cases} F_x = 2xy + 1 + my = 0 \dots (1) \\ F_y = x^2 + 1 + mx = 0 \dots (2) \\ F_z = xy - 4 = 0 \dots (3) \end{cases}$$

De (3), obtenemos $y = \frac{4}{x}$. Entonces, al sustituir en (1) encontramos que:

$$2x \left(\frac{4}{x}\right) + 1 + m \left(\frac{4}{x}\right) = 0 \rightarrow 9 + \frac{4m}{x} = 0 \rightarrow 9x + 4m = 0 \rightarrow m = \frac{-9x}{4}$$

Usamos esta información en la ecuación (2):

$$x^2 + 1 + \left(\frac{-9x}{4}\right)x = 0 \rightarrow 4x^2 + 4 - 9x^2 = 0 \rightarrow 4 - 5x^2 = 0$$

De aquí obtenemos que $x = \pm \sqrt{\frac{4}{5}} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Para $x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, obtenemos $y = \frac{4}{-\frac{2}{\sqrt{5}}} = -2\sqrt{5}$. Nuestro primer punto, posible punto

para máximo o mínimo de la función, es $P_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -2\sqrt{5}\right)$.

Con $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$, obtenemos $y = 2\sqrt{5}$. Nuestro segundo punto es $P_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 2\sqrt{5}\right)$. La decisión final la obtenemos por evaluación y simple comparación. Tenemos:

$f(P_1) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 (-2\sqrt{5}) - \frac{2}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{5} = -4\sqrt{5} \approx -8.944$: un mínimo de la función.

$f(P_2) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 (2\sqrt{5}) + \frac{2}{\sqrt{5}} + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5} \approx 8.944$: un máximo de la función.

5. Considera la siguiente tabla de $z = f(x, y)$. Mediante linealización, obtén una aproximación al valor de $f(3.1, 2.07)$.

$x \backslash y$	1.9	2.0	2.2
2.8	12.5	10.2	9.3
3.0	18.1	17.5	15.9
3.5	20.0	22.4	26.1

SOLUCIÓN:

Usamos la fórmula $L(x, y) = z_0 + f_x(3, 2)(x - 3) + f_y(3, 2)(y - 2)$. Calculamos ahora las derivadas parciales de la expresión anterior:

$$f_x(3, 2) \approx \frac{f(2.8, 2) - f(3, 2)}{2.8 - 3} = \frac{10.2 - 17.5}{-0.2} = 36.5$$

$$f_y(3, 2) \approx \frac{f(3, 1.9) - f(3, 2)}{1.9 - 2} = \frac{18.1 - 17.5}{-0.1} = -6$$

Entonces:

$$L(x, y) = 17.5 + 36.5(x - 3) - 6(y - 2)$$

Finalmente, la aproximación queda como:

$$f(3.1, 2.07) \approx L(3.1, 2.07) = 20.73$$