Tecnológico de Monterrey

Nombre: ________________________

Matrícula: ____________________

Indicaciones:

- Este quiz consta de 5 reactivos, cada uno con un valor de 20 puntos.
- Cada ejercicio debe tener procedimiento **ordenado y completo** que justifique adecuadamente la respuesta dada.
- **Si falta el procedimiento** o éste no justifica la respuesta, **entonces el problema vale 0 puntos** aunque la respuesta sea correcta.
- No olvides identificar el ejercicio e inciso que estás resolviendo.
- Cualquier intento de fraude amerita **DA**.

1. Considera la superficie $y^2 + z^2 e^{\,z-x} = 5$.
   a) Determina su linealización en el punto $(1,2,1)$.
   b) Si $z = f(x,y)$, obtén un valor aproximado de z si $x = 0.81, y = 2.23$.

SOLUCIÓN:

a) Utilizamos la fórmula $\nabla F(\overrightarrow{P_0}) . (\vec{P} - \vec{P}_0) = 0$. Calculamos el gradiente:

$F_x(\overrightarrow{P_0}) = -z^2 e^{\,z-x}|_{\vec{P}_0} = -1$

$F_y(\overrightarrow{P_0}) = 2y|_{\vec{P}_0} = 4$

$F_z(\overrightarrow{P_0}) = z^2 e^{\,z-x} + 2\,z\,e^{\,z-x}|_{\vec{P}_0} = 3$

Entonces:

$$(-1,4,3).(x-1, y-2, z-1) = 0;$$

Tenemos: $-x + 1 + 4y - 8 + 3z - 3 = 0 \rightarrow -x + 4y + 3z = 10$

Al despejar "z", obtenemos la linealización de la superficie, ésta es:

$$L(x,y) = \frac{x - 4y + 10}{3}$$

b) Con base en el resultado de a), hallamos:

$$f(0.81,2.23) \approx L(0.81,2.23) = \frac{0.81 - 4(2.23) + 10}{3} = 0.63$$

2. Encuentra y analiza **TODOS** los puntos críticos de la función
$$f(x,y) = 11x^2 - 2xy + 2y^2 + 3y$$

SOLUCIÓN:

Primero determinamos los puntos críticos, establecemos el sistema:

$$\begin{cases} f_x = 22x - 2y = 0 \ldots (1) \\ f_y = -2x + 4y + 3 = 0 \ldots (2) \end{cases}$$

Por (1), obtenemos $y = \frac{22\,x}{2} = 11\,x$. Al sustituir en (2) encontramos:

$$-2x + 4(11x) + 3 = 0 \rightarrow 42x = -3 \rightarrow x = -\frac{3}{42} = -\frac{1}{14}$$

Para "y", encontramos que $y = 11x = -\frac{11}{14}$. Por lo tanto el único punto crítico es:

$$P\left(-\frac{1}{14}, -\frac{11}{14}\right)$$

Calculamos ahora el discriminante para aplicar el criterio que determine la naturaleza del punto crítico. Tenemos:

$$f_{xx} = 22;\ f_{yy} = 4;\ f_{xy} = -2$$

Entonces:

$$D(x,y) = 22(4) - (-2)^2 = 84 > 0$$

Llama la atención que el discriminante no dependa de las variables y haya quedado constante. En estos casos, propiamente, **NO REQUERIMOS EVALUAR**, el signo buscado es el signo de la misma constante. En nuestro caso el signo es positivo, por lo tanto podríamos tener un máximo o un mínimo en el punto crítico. El resto del criterio debe considerar el signo de f_{xx} que también resultó una constante, razón por la cual NO será necesario evaluar, el signo requerido es el de la misma constante. Como $f_{xx} = 22 > 0$, concluimos que el punto crítico en cuestión (que por cierto nunca utilizamos para evaluar) corresponde a un MÍNIMO de la función.

3. Determina los extremos de la función $f(x,y) = x^2y + x + y$ sujeta a la condición $xy = 4$.

AYUDA: Establece el sistema de ecuaciones asociado al problema. Despeja "*y*" de la última ecuación, sustituye en la primera. Despeja el multiplicador de Lagrange, sustituye en la segunda. De esto hallarás el valor de "*x*", de esto se desencadenan las soluciones del sistema.

SOLUCIÓN:

Establecemos el Lagrangiano:

$$F(x,y,m) = x^2y + x + y + m(xy - 4)$$

Luego el sistema:

$$\begin{cases} F_x = 2xy + 1 + my = 0 \ldots (1) \\ F_y = x^2 + 1 + mx = 0 \ldots (2) \\ F_z = xy - 4 = 0 \ldots (3) \end{cases}$$

De (3), obtenemos $y = \frac{4}{x}$. Entonces, al sustituir en (1) encontramos que:

$$2x\left(\frac{4}{x}\right) + 1 + m\left(\frac{4}{x}\right) = 0 \to 9 + \frac{4m}{x} = 0 \to 9x + 4m = 0 \to m = \frac{-9x}{4}$$

Usamos esta información en la ecuación (2):

$$x^2 + 1 + \left(\frac{-9x}{4}\right)x = 0 \to 4x^2 + 4 - 9x^2 = 0 \to 4 - 5x^2 = 0$$

De aquí obtenemos que $x = \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Para $x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, obtenemos $y = \frac{4}{-\frac{2}{\sqrt{5}}} = -2\sqrt{5}$. Nuestro primer punto, posible punto para máximo o mínimo de la función, es $P_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -2\sqrt{5}\right)$.

Con $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$, obtenemos $y = 2\sqrt{5}$. Nuestro segundo punto es $P_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 2\sqrt{5}\right)$. La decisión final la obtenemos por evaluación y simple comparación. Tenemos:

$f(P_1) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2\left(-2\sqrt{5}\right) - \frac{2}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{5} = -4\sqrt{5} \approx -8.944$: un mínimo de la función.

$f(P_2) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2\left(2\sqrt{5}\right) + \frac{2}{\sqrt{5}} + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5} \approx 8.944$: un máximo de la función.

4. Considera la siguiente tabla de $z = f(x, y)$. Mediante linealización, obtén una aproximación al valor de $f(3.1, 2.07)$.

x\y	1.9	2.0	2.2
2.8	**12.5**	**10.2**	**9.3**
3.0	**18.1**	**17.5**	**15.9**
3.5	**20.0**	**22.4**	**26.1**

SOLUCIÓN:

Usamos la fórmula $L(x, y) = z_0 + f_x(3,2)(x - 3) + f_y(3,2)(y - 2)$. Calculamos ahora las derivadas parciales de la expresión anterior:

$$f_x(3,2) \approx \frac{f(2.8,2) - f(3,2)}{2.8 - 3} = \frac{10.2 - 17.5}{-0.2} = 36.5$$

$$f_y(3,2) \approx \frac{f(3,1.9) - f(3,2)}{1.9 - 2} = \frac{18.1 - 17.5}{-0.1} = -6$$

Entonces:

$$L(x,y) = 17.5 + 36.5(x-3) - 6(y-2)$$

Finalmente, la aproximación queda como:

$$f(3.1,2.07) \approx L(3.1,2.07) = 20.73$$

5. Determina los extremos absolutos de la función $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - y$ en la región del plano limitada por el disco $x^2 + y^2 \leq 9$.
SOLUCIÓN:

Hallamos los puntos al interior de la región. Obtenemos:

$$\begin{cases} f_x = 4x = 0 \\ f_y = 4y - 1 = 0 \end{cases}$$

Al resolver, encontramos el primer punto $P_1 = \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Ahora, determinamos los puntos de estudio sobre la frontera, para esto utilizamos multiplicadores de Lagrange. Iniciamos con el Lagrangiano:

$$F(x,y,l) = 2x^2 + 2y^2 - y + l(x^2 + y^2 - 9)$$

Formamos el sistema de ecuaciones:

$$F_x = 4x + 2lx = 0 \ldots (1)$$

$$F_y = 4y - 1 + 2ly = 0 \ldots (2)$$

$$F_l = x^2 + y^2 - 9 = 0 \ldots (3)$$

De (1), $2x(2+l) = 0$; de lo que se desprenden los casos: $x = 0$ & $l = -2$.

Para el caso $x = 0$, usamos (3) para hallar: $y^2 - 9 = 0$. De aquí resultan dos puntos más de estudio: $P_2 = (0,3)$ & $P_3 = (0,-3)$.

Para el caso $l = -2$, por la ecuación (2) determinamos que $4y - 1 - 4y = 0$, esto es, $-1 = 0$: ¡imposible!

Entonces se obtuvieron tres puntos de estudio que evaluaremos ahora en la función objetivo, tenemos:

$$f\left(0, \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$$

$$f(0,3) = 15$$

$$f(0,-3) = 21$$

Concluimos que el máximo absoluto es $f(0,-3) = 21$, el mínimo absoluto es

$$f\left(0, \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$$