Diferencial Total

El propio nombre “**derivada parcial**”, nos debiera indicar que en contraposición al calificativo “parcial” existe otro que lo complementa. Tal nombre y el correspondiente concepto existen y se le llama **diferencial total**. En contraste, mientras, la derivada parcial nos permite estudiar la razón de cambio de una función en la dirección de alguno de los vectores canónicos del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$; la diferencial total, como su nombre lo indica, persigue estudiar lo que pasa a la función cuando todas las variables independientes de la función cambian al mismo tiempo.

Nuestra presentación se apoyará fuertemente en la generalización de lo que ocurrió en cálculo de una variable. Iniciamos con algunas ideas que tienen la intención de recordarte lo que en su momento fue discutido en los libros de cálculo de una variable.

Para empezar, recuerda que la derivada de una función $y = f(x)$ en el punto x_0 se define por medio del siguiente límite, siempre que éste exista:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Recuerda también que si la función es derivable en x_0 entonces la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $\left(x_0, f(x_0)\right)$ está dada por

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\left(x - x_0\right)$$

En la siguiente figura se muestran tanto la gráfica de la función como el de su recta tangente. Observa que si la variable independiente cambia en una cantidad Δx entonces la función cambia en una cantidad $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, mientras que el cambio en la ordenada de la recta tangente es $y - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x$. Nos detenemos un momento para establecer las siguientes definiciones.

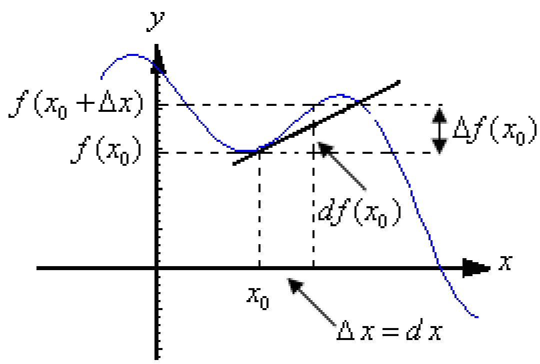
Definición. Incremento de una función
El incremento de una función $\Delta f\left(x_0\right)$ es el cambio que sufre la función cuando la variable independiente cambia una cantidad Δx, pasando de x_0 a $x_0 + \Delta x$, y está dado por:

$$\Delta f\left(x_0\right) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Definición. Diferencial de una función
Sean $y = f(x)$ una función derivable en el intervalo (a,b) y x_0 un punto en el intervalo. A la expresión:

$$df(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x$$

se le llama la diferencial de f en el punto x_0 .



Interpretación geométrica de la diferencial

Observa que si identificamos $h = \Delta x = dx$ podemos escribir la diferencial como:

$$df = f'(x_0)dx$$

Por otra parte, de acuerdo con las definiciones de derivada y de incremento de una función tenemos:

$$f'(x_0) \approx \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{d x},$$

De donde,

$$\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)dx = df(x_0)$$

Es decir, el incremento se puede aproximar con la diferencial. Como puedes observar en la figura anterior, para una función derivable en $x = x_0$, entre menor sea Δx, la aproximación $\Delta f(x_0) = df(x_0)$ será mejor. Relacionado con este resultado, se tiene el siguiente teorema, que es consecuencia directa de la definición de la derivada en $x = x_0$.

Teorema: *Sea f una función diferenciable en (a,b). Para x_0 en (a,b) y $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 \le |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))| < \varepsilon$*

El teorema indica que la diferencial estará tan cerca como queramos del incremento (menor que una distancia ε) con sólo pedir que la diferencia entre x y x_0 sea pequeña (menor que δ). Es decir, el teorema expresa simplemente que podemos aproximar muy bien a la función original, cerca de x_0, por una función lineal si nos limitamos lo suficiente en el dominio de la función. De forma simple, para valores x cercanos a x_0 se tiene que:

Aproximación lineal por recta tangente

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\left(x - x_0\right)$$

En lo que sigue proporcionamos una “completa” analogía con lo anterior. Concretamente:

Sean U un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{P_0}=(x_1,x_2,...,x_n)\in U$ y f una función de varias variables. Si cada una de las variables independientes sufre un cambio y denotamos este cambio por Δx_i, entonces:

Definición. Incremento de una función

El incremento de una función $\Delta f\left(\overrightarrow{P_0}\right)$ es el cambio que sufre la función cuando las variables independientes cambian una cantidad Δx_i, pasando de x_i a $x_i+\Delta x_i$, y está dado por:

$$\Delta f\left(\overrightarrow{P_0}\right)=f(\overrightarrow{P_0}+\overrightarrow{\Delta x})-f(\overrightarrow{P_0}),\ \text{donde}\ \overrightarrow{\Delta x}=(\Delta x_1,\Delta x_2,...,\Delta x_n)$$

El siguiente teorema cuya demostración omitimos es la base de la siguiente definición que expresa lo que entenderemos por diferencial total.

Teorema. Sobre la relación que existe entre el incremento de una función y sus derivadas parciales.

Si $\overrightarrow{P_0}=(x_1,x_2,...,x_n)\in U$ & $f:U\to\mathbb{R}$ es una función de varias variables con derivadas parciales continuas en *U*. Entonces:

$$\Delta f\left(\overrightarrow{P_0}\right)=\frac{\partial f\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{\partial x_n}dx_n+\varepsilon_1\Delta x_1+\varepsilon_2\Delta x_2+\cdots+\varepsilon_n\Delta x_n$$

Donde $\varepsilon_i\to 0$ cuando su correspondiente factor $\Delta x_i\to 0$.

Si la consideras como una fórmula, la expresión que aparece en el cuadro de arriba es muy importante porque dice que si los incrementos de las variables independientes son "pequeños", entonces el incremento de la función puede calcularse aproximadamente por medio de:

$$\frac{\partial f\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{\partial x_n}dx_n$$

En clara analogía con lo que ocurría en el caso de una variable. A esta última expresión es a la que llamaremos diferencial total de la función, es decir:

Definición. Diferencial total de una función en $\overrightarrow{P_0}$

Sean *U* una región del espacio $\mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{P_0}=(x_1,x_2,...,x_n)\in U$ & $f:U\to\mathbb{R}$ una función de varias variables con derivadas parciales continuas en *U*. Entonces a

$$d\ f\left(\overrightarrow{P_0}\right)=\frac{\partial f\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{\partial x_n}dx_n$$

se le llama **diferencial total de** f en el punto x_0 y se le denota por $d\ f\left(\overrightarrow{P_0}\right)$.

Aunque ha sido señalado con palabras, vale la pena resaltar lo siguiente.
Nota: En general:

$$\Delta f\left(\overrightarrow{P_0}\right) \approx d\, f\left(\overrightarrow{P_0}\right)$$

Plano Tangente

Pero las analogías no terminan con lo anterior. La figura contiene una idea muy importante que buscaremos reproducir para el caso de varias variables, nos referimos a la "*linealización local de la función*". En efecto, en el caso de una variable, la recta tangente a la gráfica de la función en x_0 está dada por $y = f(x_0) + f'(x_0)\left(x - x_0\right)$, si haces la correspondiente analogía verás que lo conducente para el caso de varias variables sería:

$$w = f\left(\overrightarrow{P_0}\right) + \frac{\partial f\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial f\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{\partial x_2} d x_2 + \cdots + \frac{\partial f\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{\partial x_n} d x_n,$$

Ó, si escribimos $\overrightarrow{P_0} = \left(a_1, a_2, ..., a_n\right) \in U$:

$$w = f\left(\overrightarrow{P_0}\right) + \frac{\partial f\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{\partial x_1}\left(x_1 - a_1\right) + \frac{\partial f\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{\partial x_2}\left(x_2 - a_2\right) + \cdots + \frac{\partial f\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{\partial x_n}\left(x_n - a_n\right)$$

Notarás que por la forma que tiene la ecuación anterior estamos hablando de un plano en *n* dimensiones, superficie a la que se le llama hiperplano.

Otra forma de abordar la misma idea desde una perspectiva diferente es a través de la consideración de la diferencial total. Desde este enfoque, la idea sigue siendo la misma: conseguir una aproximación local y lineal de una función de varias variables. Como vimos en el desarrollo sobre diferencial total:

$$\Delta f\left(\overrightarrow{P_0}\right) \approx d\, f\left(\overrightarrow{P_0}\right),$$

Donde $\Delta f\left(\overrightarrow{P_0}\right) = f(\overrightarrow{P_0} + \overrightarrow{\Delta x}) - f(\overrightarrow{P_0})$

& $d\, f\left(\overrightarrow{P_0}\right) = \frac{\partial f\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial f\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{\partial x_2} d x_2 + \cdots + \frac{\partial f\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{\partial x_n} d x_n$. Así, el incremento de una función puede hallarse aproximadamente por la aproximación lineal:

$$p\left(\vec{x}\right) = f\left(\overrightarrow{P_0}\right) + \frac{\partial f\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial f\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{\partial x_2} d x_2 + \cdots + \frac{\partial f\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{\partial x_n} d x_n$$

Expresión en la cual $dx_i = \Delta x_i = x_i - a_i$. A la expresión lineal que aparece en el miembro derecho de la ecuación anterior lo llamamos plano tangente, esto es:

Definición. Plano tangente
La linealización de una función $f(x_1,...,x_n)$ en un punto $\overrightarrow{P_0} = (a_1,...,a_n)$, donde f es diferenciable es,

$$p(\vec{x}) = f(\overrightarrow{P_0}) + \frac{\partial f(\overrightarrow{P_0})}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \frac{\partial f(\overrightarrow{P_0})}{\partial x_2}(x_2 - a_2) + \cdots + \frac{\partial f(\overrightarrow{P_0})}{\partial x_n}(x_n - a_n)$$

Al miembro derecho de la ecuación se le llama **plano tangente**.

Esta función (la del lado derecho de la anterior ecuación) proporciona una excelente aproximación de la función "cerca" del punto de contacto.

Ejemplo 1.
Determina la ecuación del plano tangente a la superficie $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ en el punto $(1,1,\sqrt{2})$.

Solución:
Buscamos una ecuación que tiene la forma:

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

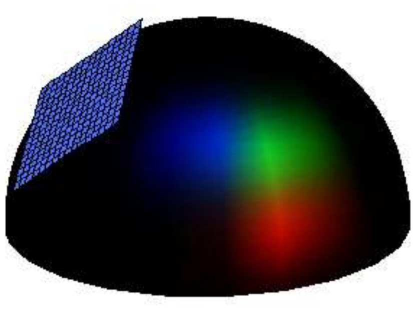
Tenemos:

$$f_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \quad f_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

De donde:

$$f(1,1) = \sqrt{2}, \quad f_x(1,1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f_y(1,1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

La ecuación del plano tangente es $z = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y-1)$. Si graficamos la función dada y el plano tangente correspondiente en el punto $(1,1,\sqrt{2})$, obtenemos el aspecto de la siguiente figura.



Dado que el plano tangente proporciona una aproximación local de la función en la cercanía de $\overrightarrow{P_0}$, en principio es posible aproximar el valor de una función en puntos cercanos a $\overrightarrow{P_0}$.

Ejemplo 2.
Considera la siguiente tabla de valores de la función $f(x,y)$.

$x \setminus y$	1.8	2.0	2.1
2.5	12.5	10.2	9.3
3.0	18.1	17.5	15.9
3.3	20	22.4	26.1

a) Determina la ecuación del plano tangente en el punto $\overrightarrow{P_0} = (3,2)$.
b) Estima el valor de $f(3.01, 2.08)$.

Solución:
En primer lugar requerimos calcular las derivadas parciales de la función, para lo cual, debido a que no contamos con una fórmula para la función recurrimos a la definición. Claro, aquí hay un asunto que debemos considerar, a saber, si el punto que nos interesa es $\overrightarrow{P_0} = (3,2)$ y buscamos una aproximación, tomaremos los puntos para el cálculo aproximado de la derivada apoyándonos en los puntos más cercanos. Así:

$$f_x(3,2) \approx \frac{f(3.3,2) - f(3,2)}{3.3-3} = \frac{22.4-17.5}{3.3-3} = 16.33$$

$$f_y(3,2) \approx \frac{f(3,2.1) - f(3,2)}{2.1-2} = \frac{15.9-17.5}{2.1-2} = -16$$

a) De aquí resulta que la ecuación del plano tangente es $z = 17.5 + 16.33(x-3) - 16(y-2)$
b) Entonces:

$$f(3.01, 2.08) \approx z\,\Big|_{(3.01,2.08)} = 17.5 + 16.33(3.01-3) - 16(2.08-2) = 16.383$$

Aunque el valor anterior sólo nos ofrece una estimación del verdadero valor, no obstante tiene la ventaja de no requerir ningún ajuste a una fórmula de la función.

Plano tangente para funciones implícitas

Si la función $z = f(x,y)$ esté definida implícitamente por la condición $F(x,y,z) = C\,;C$ constante, es posible que no podamos expresar a z de forma explícita. En este caso nos resultaría imposible utilizar la fórmula de los Ejemplos 1 y 2. En estos casos utilizamos la siguiente idea importante.

Supón que C_1 es una curva sobre la superficie $F(x,y,z)=0$ y que ésta viene expresada por la ecuación $F\left(x(t),y(t),z(t)\right)=C$ para t en cierto intervalo I (ver la siguiente figura). Supón ahora que el plano es tangente a la superficie en el punto $\overrightarrow{P_0}=\left(x_0,y_0,z_0\right)$ por el que pasa la curva en el tiempo $t=t_0$ y que $\overrightarrow{V_1}$ representa el vector tangente a la curva C_1 en $t=t_0$. Entonces, por la regla de la cadena:

$$\frac{d}{d\,t}F\left(x(t),y(t),z(t)\right)=\frac{d}{d\,t}(C)=0$$

O bien,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\left(\frac{d\,y}{d\,t}\right)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)=0\,.$$

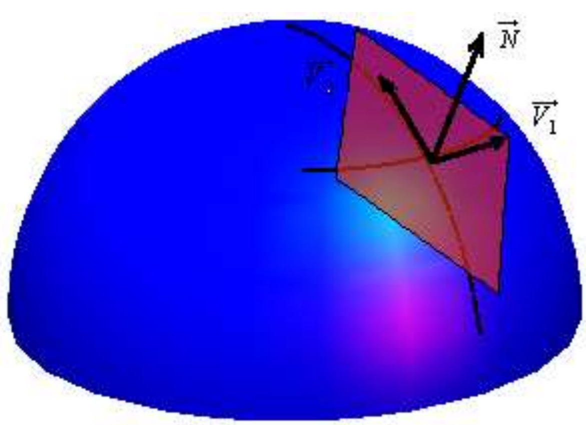
Por lo tanto, en $t=t_0$:

$$\left(\frac{\partial F\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{\partial x}\right)\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right)\Bigg|_{t=t_0}+\left(\frac{\partial F\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{\partial y}\right)\left(\frac{d\,y}{d\,t}\right)\Bigg|_{t=t_0}+\left(\frac{\partial F\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{\partial z}\right)\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\Bigg|_{t=t_0}=0$$

Es decir,

$$\nabla F\left(\overrightarrow{P_0}\right)\cdot\left(x'\left(t_0\right),y'\left(t_0\right),z'\left(t_0\right)\right)=\nabla F\left(\overrightarrow{P_0}\right)\cdot\overrightarrow{V_1}=0\,.$$

Esto significa que el vector gradiente de la función $F(x,y,z)=C$ en $\overrightarrow{P_0}=\left(x_0,y_0,z_0\right)$ es ortogonal al vector $\overrightarrow{V_1}$. De la misma manera, repitiendo el argumento, el vector gradiente de la función $F(x,y,z)=C$ en $\overrightarrow{P_0}$ es ortogonal al vector $\overrightarrow{V_2}$. Como $\overrightarrow{V_1}$ y $\overrightarrow{V_2}$ determinan el plano, concluimos que el vector $\nabla F\left(\overrightarrow{P_0}\right)$ es un vector ortogonal al plano. Lo que acabamos de discutir nos lleva a varios resultados que serán de suma utilidad en la medida que avancemos.



Teorema. Otra interpretaciones geométricas del vector gradiente:
Sea $F(x,y,z)=C$ una función diferenciable y $\overrightarrow{P_0}=\left(x_0,y_0,z_0\right)$ un punto de la superficie descrita por la propia función F. Entonces:

- El vector gradiente es ortogonal a cualquier superficie de nivel descrita por la ecuación $F(x,y,z)=C$. Lo mismo puede decirse para las curvas de nivel de una función de dos variables independientes.
- La ecuación del plano tangente a la superficie descrita por F en el punto $\overrightarrow{P_0}$ está dado por:

$$\nabla F\left(\overrightarrow{P_0}\right)\cdot\left(\vec{P}-\overrightarrow{P_0}\right)=0\text{, donde } \vec{P}=\left(x,y,z\right)$$

Ejemplo 3.
Obtén la ecuación del plano tangente a la superficie $zx^2-xy^2-yz^2=18$ en el punto $\overrightarrow{P_0}=\left(0,-2,3\right)$. Utiliza tu resultado para obtener un valor aproximado de z cuando $x=0.3$, $y=-1.8$.

Solución:
En este ejercicio $F(x,y,z)=zx^2-xy^2-yz^2=18$. Lo primero que haremos será calcular $\nabla F\left(0,-2,3\right)$. Tenemos:

$$F_x=2xz-y^2\Big|_{(0,-2,3)}=2\left(0\right)\left(3\right)-\left(-2\right)^2=-4$$

$$F_y=-2xy-z^2\Big|_{(0,-2,3)}=-2\left(0\right)\left(-2\right)-\left(3\right)^2=-9$$

$$F_z=x^2-2yz\Big|_{(0,-2,3)}=\left(0\right)^2-2\left(-2\right)\left(3\right)=12\text{,}$$

Por lo tanto, $\nabla F\left(0,-2,3\right)=\left(-4,-9,12\right)$. Con base en este cálculo, determinamos que la ecuación del plano tangente está dada por:

$$\nabla F\left(\overrightarrow{P_0}\right)\cdot\left(\vec{P}-\overrightarrow{P_0}\right)=\left(-4,-9,12\right)\cdot\left(x-0,y+2,z-3\right)$$

$$=-4x-9y-18+12z-36=0\text{,}$$

De aquí resulta la ecuación buscada $4x+9y-12z+54=0$. En cuanto a la aproximación, si sustituimos $x=0.3$, y $y=-1.8$, obtenemos:

$$4\left(0.3\right)+9\left(-1.8\right)-12z+54=0\text{, de donde } z=3.25$$