Derivación de Funciones de Varias Variables

Introducción

La experiencia ganada en el cálculo de una variable puso de manifiesto que la gráfica de una función puede ser un recurso muy importante para generar ideas e interpretaciones. No obstante, nuestro trabajo inicial, que fue dedicado a graficar cierto tipo de superficies: cuádricas, cilindros y planos nos dejó ver que graficar superficies en $\mathbb{R}^3$ no es una tarea cómoda, aún para "superficies sencillas". Más aún, la tarea no sólo se vuelve complicada sino eventualmente imposible si la superficie en cuestión nos requiere ir más allá de $\mathbb{R}^3$. Esto significa que necesitamos apoyarnos en otras ideas para ganar conocimiento sobre funciones de varias variables. De manera más concreta, esta idea provendrá del concepto de derivada para funciones de varias variables. Como seguramente recordarás, la derivada, entre muchas otras aplicaciones, nos permitió lograr interpretaciones de funciones de una variable, conceptos tales como crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad fueron discutidos sin la necesidad de tener la gráfica de una función a la vista. Ahora precisamos lo que la derivada significa para funciones de varias variables, y en la medida que avancemos veremos qué aspectos de su gráfica pueden ser detectados sin la necesidad de tenerla a la vista.

Derivada parcial

La derivada de una función representa una razón de cambio de la variable dependiente respecto al cambio de la variable independiente. Claro que para una función de varias variables, la primera pregunta que tendríamos que responder es: ¿a qué variable independiente nos referimos en este caso? La respuesta a esta pregunta precisa nuestra primera definición que nos llevará a la idea de razón de cambio de la variable dependiente respecto a cada una de sus variables independientes, a este concepto se le llama **derivación parcial**, concepto que resultará ser la piedra angular del resto de la teoría que está por construirse.

Definición 1. Derivación parcial
Sean U un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{P_0} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in U$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una función de varias variables. Para $j = 1, 2, ..., n$, la derivada parcial de f con respecto a la variable x_j se denota por $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\left(\overrightarrow{P_0}\right)$ y se define por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\overrightarrow{P_0}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_j + h, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\overrightarrow{P_0} + h\overrightarrow{e_j}\right) - f\left(\overrightarrow{P_0}\right)}{h}$$

Si el límite existe y $\overrightarrow{e_j} = (0, ..., 1, ..., 0)$ es el *j*-ésimo vector de la base canónica, con 1 en el j-ésimo lugar.

Notación: Otras formas de escritura de la derivada parcial vienen dadas por los símbolos:
$f_{x_j}\left(\overrightarrow{P_0}\right)$, $f_j\left(\overrightarrow{P_0}\right)$
Nosotros usaremos indistintamente cualquiera de estos símbolos.
La primera observación que podemos hacer al respecto de nuestra definición es que $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ es la derivada de f respecto a la variable x_j, *manteniendo el resto de las variables fijas*. Esto significa, que cada vez que calculamos una derivada parcial estamos determinando cómo cambia la función f con el cambio de una sola de sus variables independientes a la vez. También significa desde el punto de vista operativo, que el cálculo de una derivada parcial se realiza viendo a x_j como única variable, y al resto de las x_i como constantes.

Ejemplo 1.
Calcula las derivadas parciales f_x & f_y de la función $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$.
Solución:
Para el cálculo de f_x, consideraremos que "y" es una constante, para f_y que "x" es una constante. De esta forma:

$$f_x=\frac{(x+y)\frac{\partial}{\partial x}(x-y)-(x-y)\frac{\partial}{\partial x}(x+y)}{(x+y)^2}$$

$$=\frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}=\frac{2y}{(x+y)^2};$$

$$f_y=\frac{(x+y)\frac{\partial}{\partial y}(x-y)-(x-y)\frac{\partial}{\partial y}(x+y)}{(x+y)^2}$$

$$=\frac{(x+y)(-1)-(x-y)}{(x+y)^2}=-\frac{2x}{(x+y)^2}$$

Ejemplo 2.
Muestra que la función $f(x,y)=\arctan\left(\dfrac{x^3+y^3}{x-y}\right)$ satisface la ecuación diferencial $x\,f_x+y\,f_y=sen(2f)$.
Solución:
En primer lugar calculamos las derivadas parciales para lo cual emplearemos la fórmula:

$$\left(\arctan(u)\right)'=\frac{u'}{1+u^2}$$

Tenemos:

$$f_x = \frac{\dfrac{(x-y)\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3+y^3\right)-\left(x^3+y^3\right)\frac{\partial}{\partial x}(x-y)}{(x-y)^2}}{1+\left(\dfrac{x^3+y^3}{x-y}\right)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{(x-y)\left(3x^2\right)-\left(x^3+y^3\right)}{(x-y)^2}}{\dfrac{(x-y)^2}{(x-y)^2}+\dfrac{\left(x^3+y^3\right)^2}{(x-y)^2}} = \frac{2x^3-3x^2y-y^3}{(x-y)^2+\left(x^3+y^3\right)^2}$$

De manera análoga $f_y = \dfrac{x^3+3xy^2-2y^3}{(x-y)^2+\left(x^3+y^3\right)^2}$. Luego

$$x\,f_x + y\,f_y = \frac{2x^4-3x^3y-xy^3+3xy^3+x^3y-2y^4}{(x-y)^2+\left(x^3+y^3\right)^2}$$

$$= \frac{2x^4-2x^3y+2xy^3-2y^4}{(x-y)^2+\left(x^3+y^3\right)^2} = \frac{2x^3(x-y)+2y^3(x-y)}{(x-y)^2+\left(x^3+y^3\right)^2}$$

$$= \frac{2(x-y)\left(x^3+y^3\right)}{(x-y)^2+\left(x^3+y^3\right)^2}$$

Por otro lado, como $f(x,y)=\arctan\left(\dfrac{x^3+y^3}{x-y}\right)$, deducimos que $\tan(f)=\dfrac{x^3+y^3}{x-y}$. Debido a que la tangente es el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente, podemos construir el siguiente triángulo rectángulo en el que completamos la hipotenusa por medio del teorema de Pitágoras.

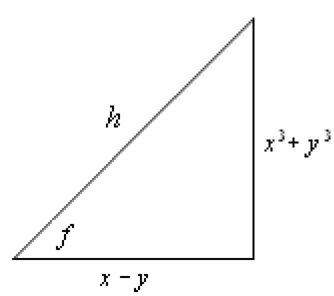

Figura 1. Esquema para simplificar los cálculos en el Ejemplo 2.

Donde $h=\sqrt{\left(x^3+y^3\right)^2+\left(x-y\right)^2}$. Ahora bien, de la identidad $sen\left(2\theta\right)=2sen\left(\theta\right)\cos\left(\theta\right)$, obtenemos:

$$sen\left(2f\right)=2sen\left(f\right)\cos\left(f\right)=2\left(\frac{x^3+y^3}{h}\right)\left(\frac{x-y}{h}\right)=2\frac{\left(x-y\right)\left(x^3+y^3\right)}{\left(x-y\right)^2+\left(x^3+y^3\right)^2}$$

$$=x\,f_x+y\,f_y$$

Esto verifica nuestro resultado.