Tarea 10. OPTIMIZACIÓN RESTRINGIDA (multiplicadores de Lagrange)

1. Elabora una gráfica (en Mathematica) que contenga las curvas de nivel de la función $f(x,y) = xy$ y el contorno $x^2 + y^2 = 1$. A partir de la gráfica anterior conjetura dónde logra la función su máximo y su mínimo. Ahora aplica la teoría de Lagrange y determina los extremos de la función sujeta a la condición dada.

2. Se repite el enunciado del problema anterior para la función $f(x,y) = x^2 - y$ sujeta a la condición $x^2 + y^2 = 25$.

En los ejercicios 3-6, usa multiplicadores de Lagrange para encontrar los valores máximo y/o mínimo de la función y restricciones dadas en cada caso.

3. $f(x,y) = 4\,x^3 + \,y^{\,2}$; $2x^2 + y^2 = 1$.

4. $f(x,y,z) = 2x + y - 2z$; $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

5. $f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$; $xyz = 10$.

6. $U(x,y,z) = xyz$; $2x + 3y + 4z = 90$ para valores de las variables NO negativos.

7. $f(x,y,z) = xz + yz$ si el dominio de la función resulta de la intersección de las superficies $x^2 + z^2 = 2$ & $yz = 2$.

8. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ si el dominio de la función resulta de la intersección de las superficies $x + 2y + 3z = 6$ & $x - y - z = -1$.

9. Encuentra el punto sobre la recta $2x - 4y = 3$ que esté más cerca del origen.

10. Encuentra un vector tridimensional cuya longitud sea 5 y cuyas componentes tengan la suma más grande posible.

11. Una empresa requiere construir un tanque rectangular con capacidad de 1500 pies cúbicos de agua. La base y las paredes verticales deberán ser de concreto y la tapa de acero. Si el costo del acero es del doble por unidad de área que el del concreto, determina las dimensiones del tanque que minimizan el costo total de construcción.

12. Elaborar una pieza de cierto producto le cuesta a una empresa L unidades de capital para mano de obra & K unidades de capital para materia prima. Bajo estas condiciones, la empresa puede elaborar P unidades de su producto, donde:

$$P(L,K) = 50L^{2/3}K^{1/3}$$

Si cada unidad de producto le cuesta a la empresa 100 dólares en mano de obra y 300 dólares de materia prima, y si la empresa dispone de una suma de 45 mil dólares para su producción, determina las unidades de mano de obra y de materia prima que permiten maximizar la producción.

13. Una compañía elabora dos tipos de producto, A & B. De cada unidad A, obtiene una utilidad de 4 dólares y 6 dólares por cada unidad tipo B. Los datos estadísticos de producción de estos productos permiten decir que la relación promedio entre las unidades *x* & *y* de ambos productos A & B, respectivamente, están relacionados mediante:

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y = 4$$

Donde *x* & *y* están en miles de unidades por semana. Halla las cantidades de cada tipo que deben producirse a fin de maximizar la utilidad.

RESPUESTAS:

1. $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2};\ f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$; máximo y mínimo, respectivamente.

2. Máximo igual a $\frac{101}{4}$, mínimo igual a -5.

3. Máximo $\sqrt{2}$ en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$; mínimo $-\sqrt{2}$ en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

4. Máximo 6 en $\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)$; mínimo -6 en $\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.

5. La función tiene un mínimo en $x = 2.71442, y = 2.71442, z = 1.35721$, el valor de este mínimo es $f(2.71442,2.71442,1.35721) = 22.1042$.

6. La función tiene un máximo en el punto indicado y con el valor correspondiente que resulta de la evaluación, es decir, $U(15,10,7.5) = 1125$.

7. La función tiene un valor máximo de 3 y un valor mínimo igual a 1.

8. La función tiene un valor mínimo igual a $\frac{37}{13}$.

9. $\left(\frac{3}{10},-\frac{3}{5}\right)$

10. $\left(\frac{5}{\sqrt{3}},\frac{5}{\sqrt{3}},\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$

11. Las dimensiones del tanque deberían ser de 10 pies por 10 pies por 15 pies.

12. La empresa maximiza su producción con $L = 300$ & $K = 50$.

13. La utilidad máxima es de 5630 por semana al producir por semana 664 unidades de producto tipo A y de 496 unidades tipo B.