Tarea 13. Integral triple y cambio de variable en integrales triples.

1. (a) Describe en coordenadas cilíndricas, una rebanada de queso cortada de un cilindro de 4 cm de altura y 6 cm de radio; la rebanada subtiende un ángulo de $\pi/6$ en el centro.
   (b) Determina el volumen del sólido descrito en (a).

2. Calcula tanto con coordenadas cilíndricas como con coordenadas esféricas el volumen delimitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

3. Calcula $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{a^2-x^2-y^2} x^2 dzdydx$; $a > 0$.

4. Calcula $\int_{-2}^{2} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}dzdydx$

5. Calcula $\int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dzdydx$

6. Calcula el volumen del sólido del primer octante limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ & el plano $z = x$.

7. Calcula la integral $\iiint_R f(x,y,z)dV$, donde $f(x,y,z) = x$ y R es el sólido acotado por los planos $x + y - z + 2 = 0$; $z = 0$ en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 2$.

8. Haz el planteamiento para calcular $\iiint_R (x^2+y^2)dV$, donde R es un sólido limitado inferiormente por el plano xy, superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ y lateralmente por el cilindro $r = 2a\cos(\theta)$ (usa coordenadas cilíndricas).

9. Calcula (usa coordenadas esféricas) $\iiint_R dV$, donde R está limitada por la esfera $\rho = a$ & el cono $\phi = \alpha$, con a y α positivos. Geométricamente, ¿qué estás calculando?

10. Calcula el volumen de un cono circular recto de altura h y de radio a.

11. Encuentra el volumen del sólido limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y dentro de $x^2 + y^2 = 3z^2$.

12. Encuentra el volumen encerrado por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, haz el cálculo usando:
    a) Coordenadas cartesianas x, y, z.
    b) Haciendo el cambio de variables $x = as$, $y = bt$, $z = cu$. Tendrás que calcular el ***jacobiano***, ¿cómo extenderás tus resultados de la sesión anterior?

13. Calcula la masa de una semiesfera sólida de radio "*a*" metros si la densidad volumétrica en cualquier punto del sólido es proporcional a la distancia del punto al plano $x\,y$.

14. Calcula la masa de la semiesfera sólida del problema 6 si la densidad volumétrica en cualquier punto del sólido es proporcional a la distancia del punto al centro de la esfera.

15. Calcula el volumen del sólido acotado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ encima del plano $z = \frac{1}{2}$.

RESPUESTAS:

1. (a) $\begin{cases} 0 \le r \le 6 \\ 0 \le \theta \le \pi/6 \\ 0 \le z \le 4 \end{cases}$; (b) 12π
2. $V = \frac{4\pi}{3} r^3$
3. $I = \frac{\pi\, a^6}{48}$
4. $I = \frac{64\pi}{9}$
5. $I = \frac{(-1+e)\pi}{3e}$
6. $V = \frac{1}{3}$
7. $I = \pi$
8. $I = \dfrac{2\pi\, a^3}{3}\left[1 - \cos\alpha\right]$
9. $I = 2\pi\, a\,\alpha$; "volumen de un cono de nieve".
10. $V = \frac{1}{3}\pi a^2 h$
11. $\dfrac{38\pi}{3}$
12. $\dfrac{4abc\pi}{3}$
13. $M = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} kzr\,dz\,d\theta\,dr = \frac{1}{4} a^4 k\pi$
14. $M = \iiint_R k\rho\, dV = \frac{1}{2} a^4 k\pi$
15. $V = \frac{9\,\pi}{8}$