Tarea 14. Campos y trayectorias

En cada ejercicio 1-6, elabora “a mano” la traza de la función vectorial; después, corrobora tu respuesta utilizando Mathematica. Indica para cada trayectoria su sentido positivo.

1. $\vec{r}(t) = (t+2,\ t^2+5t)$

2. $\vec{r}(t) = (2+3\ cost, 4-2\ sent)$

3. $\vec{r}(t) = (1+2\ senht, 2-\ 4\ cosht)$

4. $\vec{r}(t) = \frac{t^2}{t^2+1}\ \hat{\imath} + \frac{t^3}{t^2+1}\ \hat{\jmath}$

5. $\vec{r}(t) = (cost)\hat{\imath} + (sent)\hat{\jmath} + t\hat{k}$

6. $\vec{r}(t) = e^t\ \hat{\imath} + (e^{2t} + e^t)\ \hat{\jmath}$

Usa Mathematica para dibujar en cada caso los campos vectoriales indicados en los ejercicios 7 a 10. Inserta en los campos de los ejercicios 7 & 8, las trayectorias de los ejercicios 2 & 4, respectivamente.

7. $\vec{F}(x,y) = (2x, x)$

8. $\vec{F}(x,y) = (x+y, x-y)$

9. Para $\vec{P} = (x,y,z)$, $\vec{F}(\vec{P}) = 2\vec{P}$

10. Para $\vec{P} = (x,y,z)$, $\vec{F}(\vec{P}) = (y\ senx, z\ seny,\ \ xsenz)$; $x,y,z \in [-2,2]$.

11. Hallar los campos vectoriales **conservativos** asociados a los siguientes **potenciales**:

    a) $\phi(x,y,z) = ln\|\vec{r}\|$, donde $\vec{r} = (x,y,z)$.

    b) $\phi(x,y,z) = \frac{1}{\|\vec{r}\|}$, donde $\vec{r} = (x,y,z)$.

12. Calcula el campo vectorial **conservativo** asociado al **potencial** $\phi = r^n$, donde $r = \|\vec{r}\|$.

NOTA IMPORTANTE: Un campo vectorial se llama **irrotacional** si:

$$\nabla \times \vec{F} = rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z)\hat{\imath} - (R_x - P_z)\hat{\jmath} + (Q_x - P_y)\hat{k}$$

Existe un teorema que asegura que un **campo vectorial es conservativo** si y sólo si **es irrotacional.**

13. Considera el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (x + 2y + az)\hat{\imath} + (bx - 3y - z)\hat{\jmath} + (4x + cy + 2z)\hat{k}$$

   a) Encuentra los valores de las constantes a , b & c de forma que el campo vectorial sea irrotacional.
   b) Encontrar un potencial del campo vectorial $\overrightarrow{F}$.

14. Considera el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = \frac{x\hat{\imath} - y\hat{\jmath}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

   a) Dibuja el campo vectorial.
   b) Determina si el campo es irrotacional. ¿Observas algo entre a) y b)?

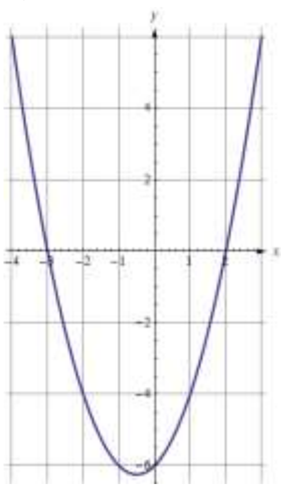
15. Encuentra el valor de la constante a de forma tal que el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (axy - z^3, (a-2)x^2, (1-a)xz^2)$$

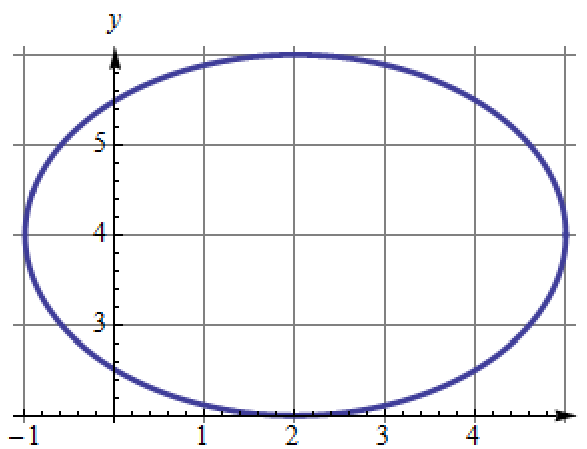
Sea conservativo. Hallar un potencial del campo vectorial.

RESPUESTAS:

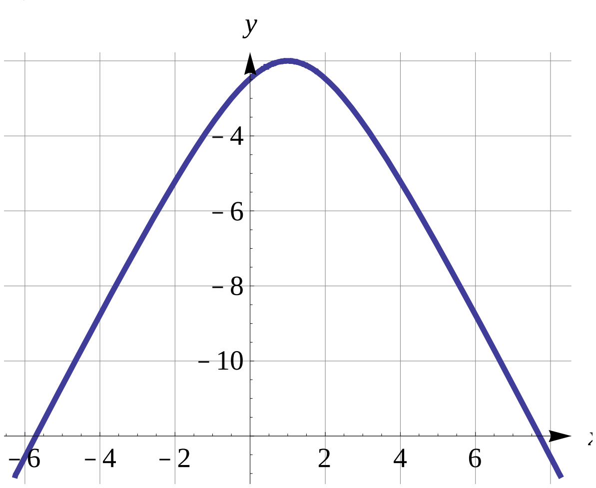
1.



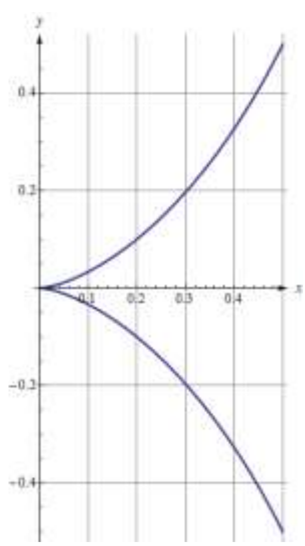
2.



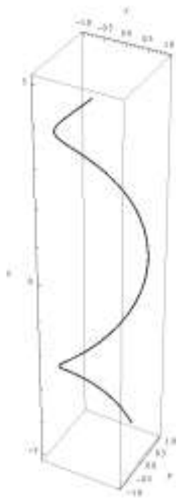
3.



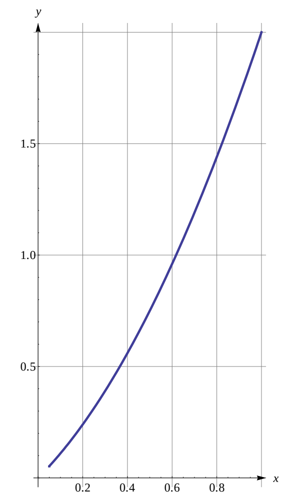
4.



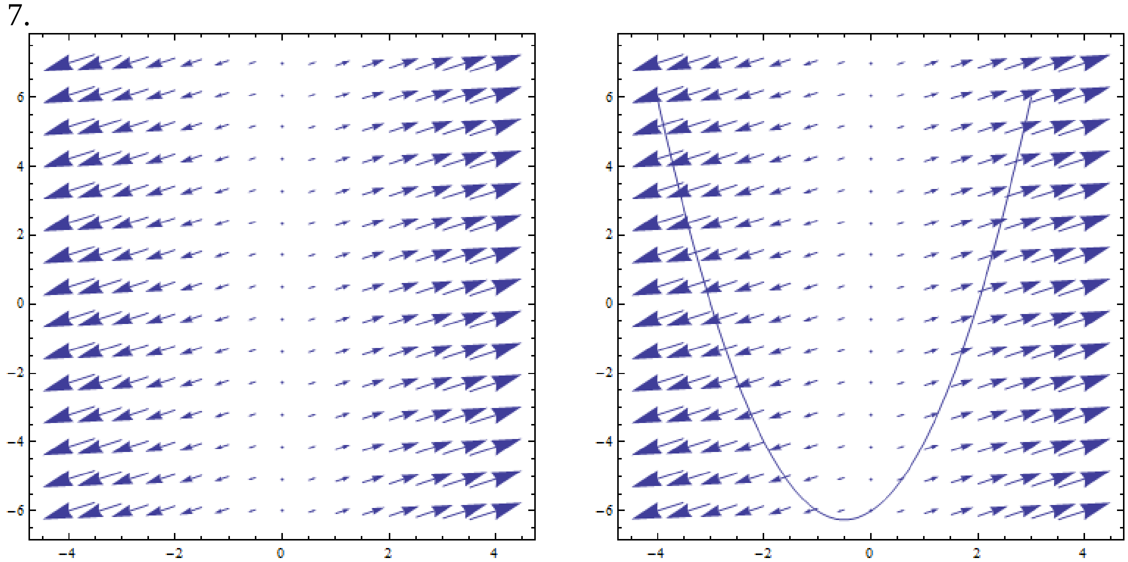
5.



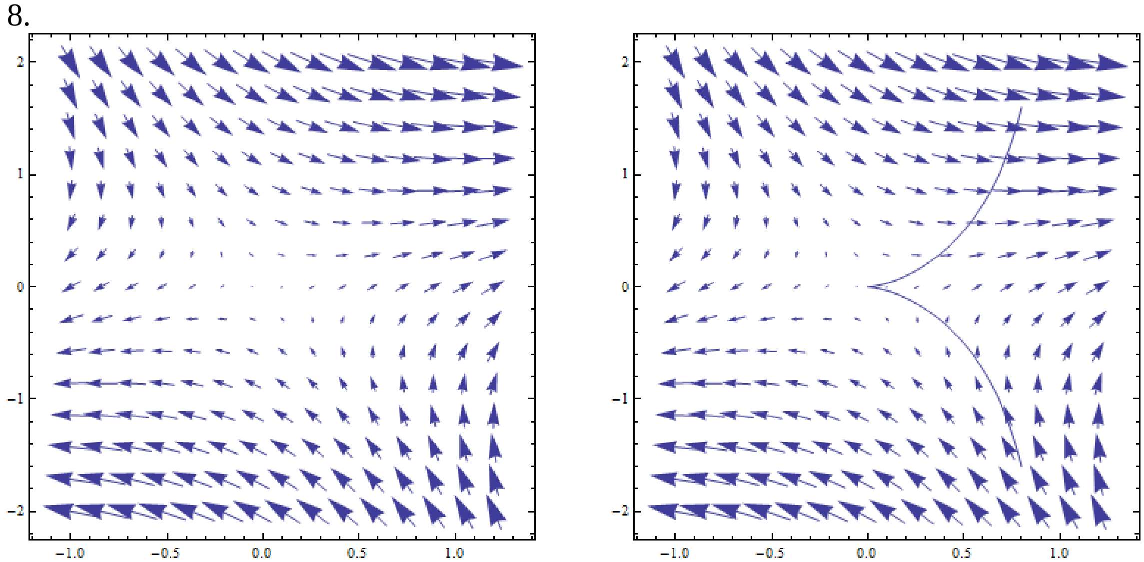
6.



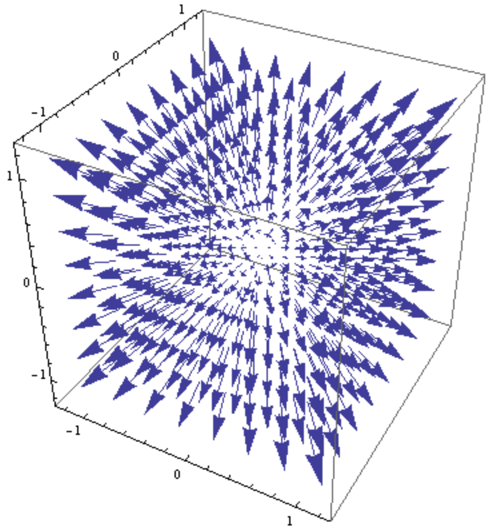
7.



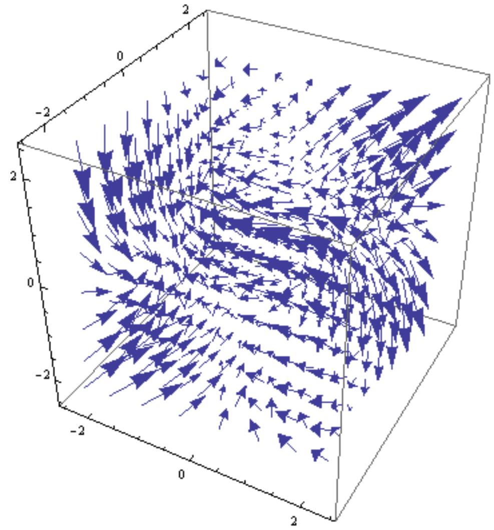
8.



9.



10.



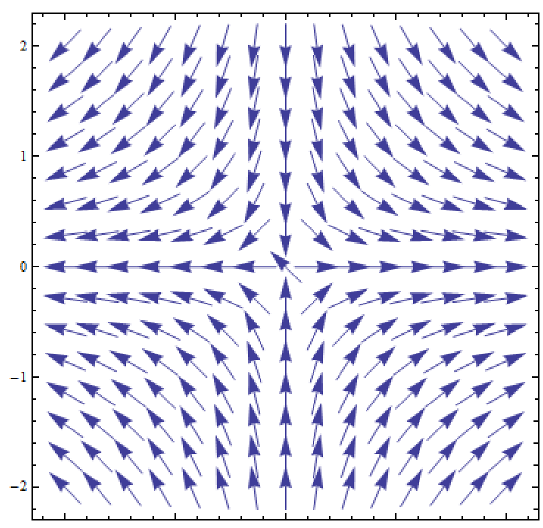
11. a) Si $r = \|\vec{r}\|$, entonces $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^2}$.

b) Con $r = \|\vec{r}\|$, entonces $\vec{F} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$.

12. $\vec{F}(x,y,z) = nr^{n-2}\vec{r}$, donde $r = \|\vec{r}\|$ & $\vec{r} = (x,y,z)$.

13. a) $a = 4, b = 2, c = -1$; b) $\emptyset(x,y,z) = \frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + z^2 + 2xy + 4xz - yz + A$; A es una constante.

14. a)



b) El campo es rotacional, es decir, $rot\ \vec{F} \neq \vec{0}$

15. $a = 4$. Un potencial del campo es $\emptyset(x,y,z) = 2x^2y - xz^3 + A$, donde A es una constante.