Tarea 15. Superficies parametrizadas

En los ejercicios 1 a 5, elimina los parámetros u & v para obtener la ecuación cartesiana. Prueba que la ecuación vectorial dada representa la superficie que se cita, después grafica la superficie correspondiente utilizando valores concretos de las constantes que aparezcan en cada caso.

1. Paraboloide elíptico $\vec{r}(u,v) = (a\,u\,cosv, b\,u\,senv, u^2)$

2. Elipsoide $\vec{r}(u,v) = (a\,senu\,cosv, b\,senu\,senv, c\,cosu)$

3. Superficie de revolución $\vec{r}(u,v) = (u\,cosv, u\,senv, f(u))$

4. Cilindro $\vec{r}(u,v) = (u, a\,senv, a\,cosv)$

5. Toro $\vec{r}(u,v) = ((a + b\,cosu)senv, (a + \ b\,cosu)\,cosv, b\,senu)$

6. Determina la parametrización de un plano que pase por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y quede determinado por los dos vectores no colineales $\vec{U} = (a_1, a_2, a_3)$; $\vec{V} = (b_1, b_2, b_3)$. Aplica tu parametrización con los datos $P_0 = (1, -2,3)$; $\vec{U} = (-1,0,2)$ & $\vec{V} = (-2,1,3)$ y obtén la gráfica de la superficie resultante.

En los ejercicios 7-9, describe verbalmente los objetos parametrizados por las ecuaciones paramétricas que se ofrecen.

7. $$\begin{aligned} x &= rcos\theta \\ y &= rsen\theta; 0 \leq r \leq 5; 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z &= 7 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} x &= rcos\theta \\ y &= rsen\theta; 0 \leq r \leq 5; 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z &= r \end{aligned}$$

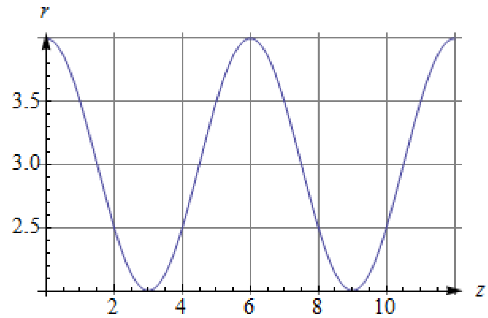
9. $$\begin{aligned} x &= 3cos\theta \\ y &= 2sen\theta; 0 \leq z \leq 7; 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z &= z \end{aligned}$$

10. Describe lo que representa la siguiente ecuación en coordenadas esféricas $\phi = \frac{\pi}{4}$.

11. Determina ecuaciones paramétricas para la esfera $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = d^2$.

12. Obtén la ecuación parametrizada del “vaso” formado al hacer girar la curva $z = 10\sqrt{x-1}$; $1 \leq x \leq 2$, alrededor del eje z. Grafica la superficie con Mathematica.

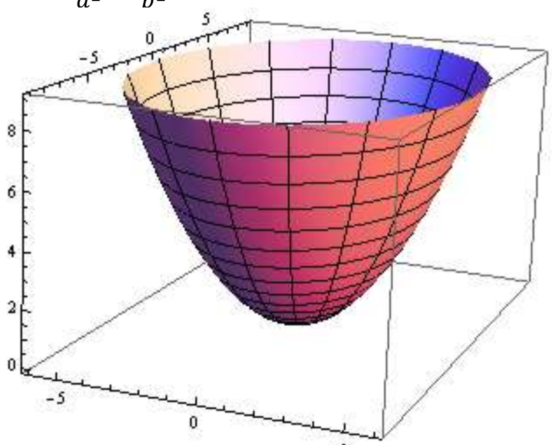
13. Una figura decorativa tendrá como perfil un contorno delimitado por $r = cos\left(\frac{\pi}{3}z\right) + 3,\, 0 \leq z \leq 12$, cuya gráfica se muestra a continuación.



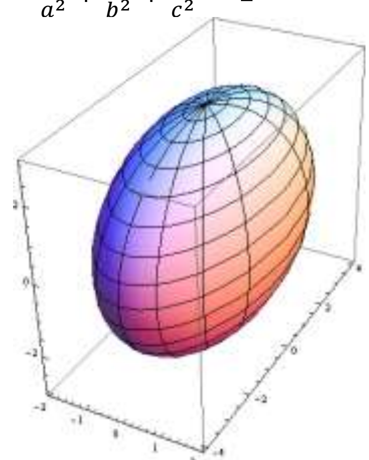
a) Si el perfil se hace girar en torno al eje z, determina la parametrización de la superficie.
b) Realiza en Mathematica la gráfica de la superficie.
c) Calcula el volumen que encierra la pieza.

RESPUESTAS:

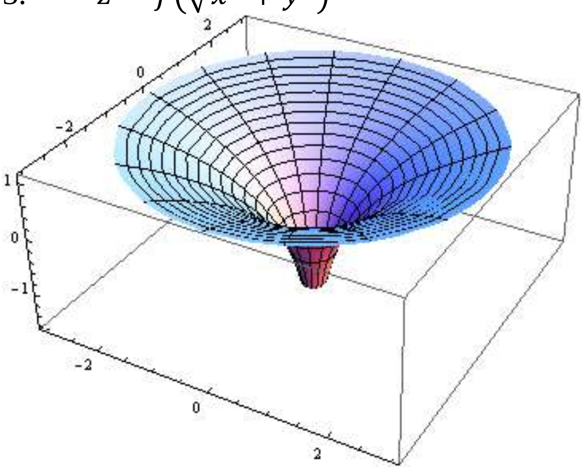
1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



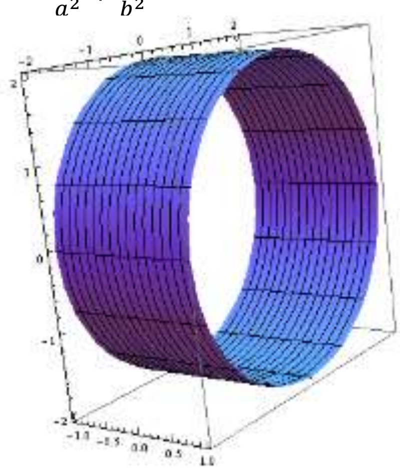
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



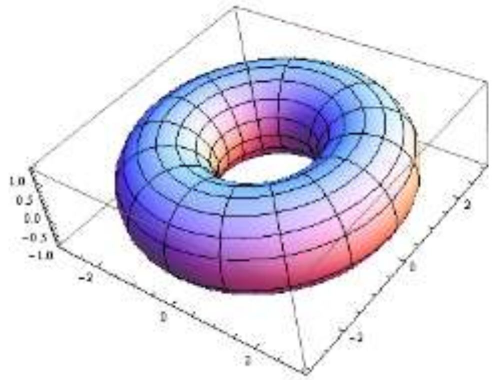
3. $z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$



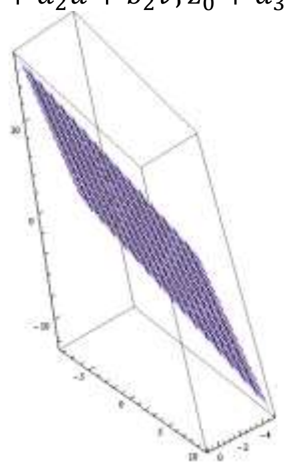
4. $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$



5. $\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2=b^2$



6. $\vec{r}(u,v)=(x_0+a_1u+b_1v, y_0+a_2u+b_2v, z_0+a_3u+b_3v)$; $u,v\in\mathbb{R}$. Un plano.



7. Un disco de radio 5 sobre el plano $z=7$.

8. Un cono con vértice en (0,0,0) que abre en dirección del eje z positivo de altura 5.

9. Un cilindro con sección transversal elíptica.

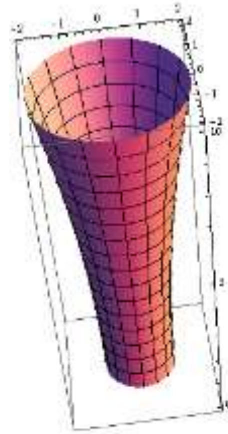
10. Representa un cono con vértice en (0,0,0) que se extiende indefinidamente en dirección del eje z positivo.

11. $x=a+d\ cos\theta\ sen\phi$; $y=b+d\ sen\theta\ sen\phi$; $z=c+d\ cos\phi$; $0\le\phi\le\pi$; $0\le\theta\le 2\,\pi$

12.

$$x = \left(\left(\frac{z}{10}\right)^2 + 1\right) cos\theta$$
$$y = \left(\left(\frac{z}{10}\right)^2 + 1\right) sen\theta \; ; \; 0 \le \theta \le$$
$$z = z$$
$$2\pi, 0 \le z \le 10$$

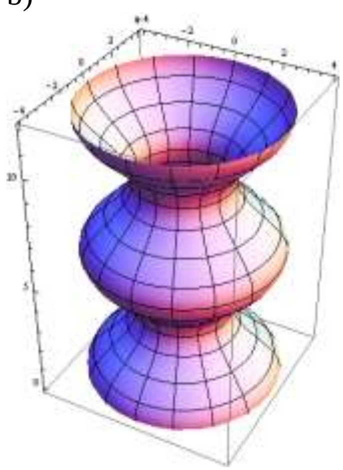
La superficie queda de la siguiente manera:



13.

a)
$$x = \left(\cos\left(\frac{\pi z}{3}\right) + 3\right) cos\theta$$
$$y = \left(\cos\left(\frac{\pi z}{3}\right) + 3\right) sen\theta \; ;$$
$$z = z$$
$$0 \le z \le 12, 0 \le \theta \le 2\pi$$

b)



c) $V = 114\,\pi$