Tarea 16. Integrales de línea

Para los ejercicios 1 y 2, calcula $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ siendo $\vec{F}(x,y,z) = (3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^2)$ desde (0,0,0) a (1,1,1) a lo largo de las siguientes trayectorias *C*.

1. $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$

2. Las rectas que unen el punto (0,0,0) con (1,0,0), y el (1,0,0) con el (1,1,1).

3. Hallar el trabajo total realizado para desplazar una partícula en un campo vectorial de fuerzas $\vec{F}(x,y,z) = 3xy\hat{\imath} - 5z\hat{\jmath} + 10x\hat{k}$ a lo largo de la curva $x = t^2 + 1, y = 2t^2$ & $z = t^3$ desde $t = 1$ hasta $t = 2$.

4. Si $\vec{F}(x,y) = 3xy\hat{\imath} - y^2\hat{\jmath}$, calcula $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ a lo largo de la curva *C* del plano *xy* con ecuación $y = 2x^2$, desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $(1,2)$.

5. Un campo vectorial de fuerzas es:

$$\vec{F}(x,y,z) = (2x - y + z)\hat{\imath} + (x + y - z^2)\hat{\jmath} + (3x - 2y + 4z)\hat{k}$$

   Calcula el trabajo realizado por este campo para dar una vuelta completa a una partícula alrededor de una circunferencia con centro en el origen y radio 3. Determina a partir del resultado si el campo vectorial es conservativo.

6. a) Demuestra que el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (2xy + z^3)\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + 3xz^2\hat{k}$$

   Es conservativo.
   b) Encuentra un potencial asociado al campo.
   c) Hallar el trabajo realizado para desplazar una partícula en este campo desde $(1,-2,1)$ hasta $(3,1,4)$.

7. Si

$$\vec{F}(x,y,z) = (4xy - 3x^2z^2)\hat{\imath} + 2x^2\hat{\jmath} - 2x^3z\,\hat{k}$$

   a) Demuestra que $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ es independiente de la trayectoria *C*.
   b) Demostrar que el campo admite un potencial que lo genera y hallar su expresión.
   c) Calcula $\oint_C \vec{F}.d\vec{r}$ a lo largo de una curva elíptica que está dentro del campo vectorial $\vec{F}$.

8. Si

$$\vec{F}(x,y,z) = (y^2 cos\ x + z^3)\hat{\imath} + (2ysenx - 4)\hat{\jmath} + (3xz^2 + 2)\,\hat{k}$$

a) Demuestra que el campo vectorial es conservativo.
b) Hallar un potencial del campo que lo genera.
c) Calcula el trabajo realizado por el campo para llevar una partícula desde $(0,1,-1)$ hasta $\left(\frac{\pi}{2},-1,2\right)$.

9. Hallar $\oint_C (y - senx)\, dx + cosx\, dy$ siendo C el triángulo con vértices en $(0,0), \left(\frac{\pi}{2},0\right)$ & $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$. Haz el cálculo directamente, luego utilizando el teorema de Green.

10. Utiliza el teorema de Green para calcular el trabajo total realizado al desplazar un objeto en dirección contraria a la del reloj, una vez, alrededor de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, si el movimiento es provocado por un campo de fuerza dado por $\vec{F}(x,y) = (senx - y)\hat{\imath} + (e^y - x^2)\hat{\jmath}$. Supón que el arco se mide en metros y la fuerza en newtons. ¿El campo es conservativo?

11. Calcula $\oint_C (x^4 - 3y)dx + (2y^3 + 4x)dy$ donde C es la curva $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

En los ejercicios 12, 13 calcula $\int_C f ds$

12. $f(x,y) = \sqrt{1 + 9xy}$; $y = x^3$ para $0 \leq x \leq 1$.

13. $f(x,y,z) = 2x^2 + 8z$; $\vec{r}(t) = (e^t, t^2, t)$ para $0 \leq t \leq 1$.

14. Calcula la masa total de una pieza de alambre de forma circular con radio de 4 cm, centrada en el origen y cuya densidad de masa es $\rho(x,y) = x^2$ g/cm.

15. Calcula $V(P)$ en $P = (0,0,12)$ si la carga eléctrica se distribuye a lo largo de la cuarta parte de una circunferencia de radio 4 centrada en el origen con densidad de carga $\rho(x,y) = xy$.

RESPUESTAS:

1. $\int_C \vec{F}.d\vec{r} = 5$

2. $\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \frac{23}{3}$

3. $W = 303$ unidades de trabajo.

4. $\int_C \vec{F}.d\vec{r} = -\frac{7}{6}$

5. $W = 18\,\pi$ unidades de trabajo.

6. b) $\emptyset(x, y, z) = x^2y + xz^3 + A$; A es una constante.

   c) $W = 202$ unidades de trabajo.

7. b) $\emptyset(x, y, z) = 2x^2y - x^3z^2 + A$; A es una constante.
   c) $\oint_C \vec{F}.d\vec{r} = 0$

8. b) $\emptyset(x, y, z) = y^2 sen\, x + x\, z^3 - 4y + 2z + A$; A es una constante.
   c) $W = 15 + 4\pi$ unidades de trabajo.

9. $\oint_C (y - senx)\, dx + cosx\, dy = -\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4}$

10. $W = \pi a^2$ joules. El campo vectorial no es conservativo.

11. $\oint_C (x^4 - 3y)dx + (2y^3 + 4x)dy = 42\pi$

12. 2.8

13. $\frac{2}{3}\left((e^2 + 5)^{3/2} - 2^{3/2}\right) \approx 27.1858$

14. $64\, \pi\, g$

15. ≈ 22743.10 voltios.