Tarea 17. Integrales de Superficie

En los ejercicios 1 y 2, calcula la magnitud del producto vectorial fundamental en términos de u & v.

1. $\vec{r}(u,v) = (u+v)\hat{\imath} + (u^2+v^2)\hat{\jmath} + (u^3+v^3)\hat{k}$

2. $\vec{r}(u,v) = u \cos v\, \hat{\imath} + u \operatorname{sen} v\, \hat{\jmath} + \frac{1}{2}\, u^2 \operatorname{sen} 2v\, \hat{k}$

3. Calcula el área de la región del plano $x+y+z=a,\ a>0$ dentro del cilindro $x^2+y^2=a^2$.

4. Calcula el área de la porción de la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ interior al cilindro $x^2+y^2=ay$.

5. Calcula el área de la porción de superficie $z^2=2xy$ que se proyecta en el primer cuadrante del plano *xy*, limitada por los planos $x=2$ & $y=1$.

6. La superficie *S* tiene como parametrización la función vectorial

$$\vec{r}(u,v) = u \cos v\ \hat{\imath} + u \operatorname{sen} v\ \hat{\jmath} + u^2\ \hat{k}$$

   Donde $0 \le u \le 4$ & $0 \le v \le 2\pi$.

   a) *S* es una tipo de superficie cuádrica, ¿cuál?
   b) ¿Cuál es el significado de los parámetros u & v?
   c) El área de *S* es

$$a(S) = \frac{\pi\left(65\sqrt{65}-1\right)}{n}$$

   ¿Cuál es el valor de *n*?

7. Calcula el área de la porción de la superficie cónica $x^2+y^2=z^2$ situada por encima del plano *xy*, limitada por la esfera $x^2+y^2+z^2=2ax$.

Para los ejercicios 8-10, se proporciona una curva generatriz que gira en torno al eje *z*.
a) Escribe las ecuaciones de las superficies de revolución en sus formas paramétrica y cartesiana.
b) Haz la gráfica de la superficie (Mathematica).
c) Determina el área de la superficie correspondiente (Mathematica).

8. $z=f(x)=\sqrt{x-1};\ 1 \le x \le 3$

9. $z=f(x)=\ln(\cos x);\ 0 \le x \le \frac{\pi}{3}$

10. $z=f(x)=x^2+2,\ 0 \le x \le 2$

INTEGRALES DE SUPERFICIE DE FUNCIONES ESCALARES

En los ejercicios 11-15, calcula $\iint_S f\, dS$ para la función f y la superficie S dada.

11. $f(x, y, z) = z$, y la superficie dada en cada uno de los siguientes incisos:

 a) El disco $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$

 b) La porción del plano $z = 1 + x$ comprendida en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

 c) La porción del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ que está arriba del plano $z = 0$ y abajo del plano $z = 1 + x$.

12. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$, S es la helicoide descrita por la parametrización

$$\vec{r}(u, v) = u\, cos\, v\, \hat{\imath} + u\, sen\, v\, \hat{\jmath} + v\, \hat{k}$$

Para $0 \le u \le 1$; $0 \le v \le 2\pi$.

13. $f(x, y, z) = xz$, S es la superficie descrita por la parametrización

$$\vec{r}(u, v) = \left(u\, cos\, v - \frac{1}{2}\right) \hat{\imath} + \sqrt{2}\, u\, sen\, v\, \hat{\jmath} + \frac{1}{2} - u\, cos\, v\, \hat{k}$$

Para $0 \le u \le \frac{1}{2}$; $0 \le v \le 2\pi$.

14. $f(x, y, z) = y$, S es la superficie $z = x + y^2$ limitada por los planos $x = 0, x = 1$; $y = 0$ & $y = 2$.

15. $f(x, y, z) = x$, S es el cilindro parabólico descrito por la parametrización

$$\vec{r}(u, v) = (u, u^2, v)$$

Para $0 \le u \le 1$; $0 \le v \le 1$.

INTEGRALES DE SUPERFICIE DE FUNCIONES VECTORIALES

16. Calcula la integral $\iint_S \left(x\, \hat{\imath} + z\, \hat{\jmath} + y\, \hat{k}\right). d\, \vec{S}$, para la superficie descrita por la parametrización:

$$\vec{r}(u, v) = (2u + v, v, -u)$$

Donde $0 \le u \le 1$; $0 \le v \le 1 - u$.

17. Calcula la integral $\iint_S \vec{F}.d\,\vec{S}$, donde $\vec{F}(x,y,z) = cos\ x\,\hat{\imath} + sen\ y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ para la superficie descrita por la parametrización:

$$\vec{r}(u,v) = (u\ cos\ v, u\ sen\ v, 1)$$

Donde $0 \le u \le 2\pi; 0 \le v \le 1$.

18. Calcula la integral $\iint_S \vec{F}.d\,\vec{S}$, donde $\vec{F}(x,y,z) = (y,x,z)$. S es la frontera del sólido limitado por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.

19. Calcula la integral $\iint_S \vec{F}.d\,\vec{S}$, donde $\vec{F}(x,y,z) = (xe^y, 1, xy)$. S es la porción del plano $z = x + y$ en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

20. Calcula la integral $\iint_S \vec{F}.d\,\vec{S}$, donde $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,1)$. S es la porción del paraboloide hiperbólico $x^2 + 4xy - z = 0$ que está dentro del cilindro $4x^2 + y^2 = 1$.

RESPUESTAS:

1. $|u - v|\sqrt{36u^2v^2 + 9(u+v)^2 + 4}$

2. $\sqrt{u^4 + u^2}$

3. $a(S) = \sqrt{3}\,\pi\,a^2$

4. $a(S) = (2\,\pi - 4)\,a^2$

5. $a(S) = 4$

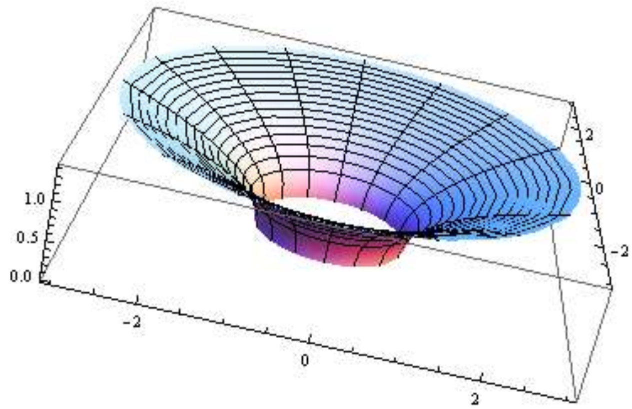
6. a) Un paraboloide.

   c) $n = 6$

7. $a(S) = \frac{\sqrt{2}\,\pi\,a^2}{4}$

8. a) Forma cartesiana $x^2 + y^2 = (z^2 + 1)^2$
   Forma paramétrica $\vec{r}(u,v) = u\ cos\ v\,\hat{\imath} + u\ sen\ v\,\hat{\jmath} + \sqrt{u-1}\,\hat{k}$, $1 \le u \le 3$;
   $0 \le v \le 2\pi$.

b) Gráfica:

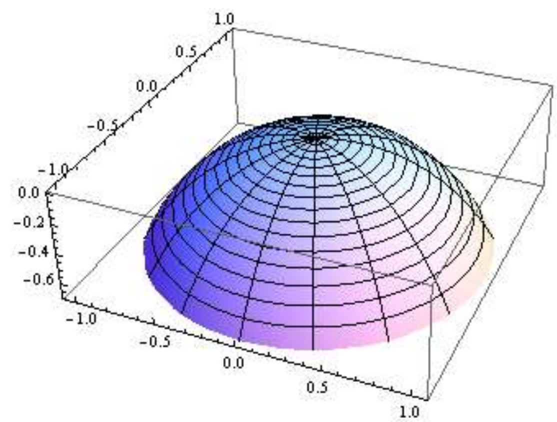


$c)\ a(S) = 30.0862$

9. a) Forma cartesiana: $z = ln\left(cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)$

   Forma paramétrica $\vec{r}(u,v) = u\ cos\ v\ \hat{\imath} + \ u\ sen\ v\ \hat{\jmath} + \ \ln(cos\ u)\ \hat{k}$, $0 \le u \le \pi/3$; $0 \le v \le 2\pi$.

   b) Gráfica

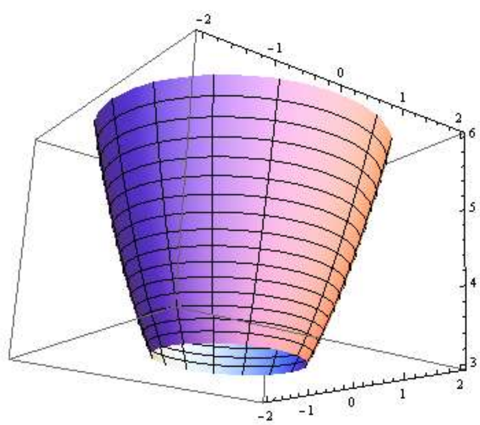


   c) $a(S) = 4.8284$

10. a) Forma cartesiana: $z = x^2 + y^2 + 2$ (un paraboloide con vértice en $(0,0,2)$).

   Forma paramétrica $\vec{r}(u,v) = u\ cos\ v\ \hat{\imath} + \ u\ sen\ v\ \hat{\jmath} + (u^2+2)\ \hat{k}$, $0 \le u \le 2$; $0 \le v \le 2\pi$.

   b) Gráfica



   c) $a(S) = 36.1769$

11. a) $\iint_S \; z\, dS = 0$

b) $\iint_S \; z\, dS = \sqrt{2}\,\pi$

c) $\iint_S \; z\, dS = \frac{3\,\pi}{2}$

12. $\iint_S \; f\, dS = \frac{8\pi}{3}$

13. $\iint_S \; f\, dS = \frac{\pi}{2}$

14. $\iint_S \; f\, dS = \frac{13\sqrt{2}}{3}$

15. $\iint_S \; f\, dS = \frac{5\sqrt{5}-1}{12}$

16. $\iint_S \; \vec{F}.d\vec{S} = 1$

17. $\iint_S \; \vec{F}.d\vec{S} = \pi$

18. $\iint_S \; \vec{F}.d\vec{S} = \frac{\pi}{2}$

19. $\iint_S \; \vec{F}.d\vec{S} = -\pi$

20. $\iint_S \; \vec{F}.d\vec{S} = \frac{7\pi}{16}$