Tarea 18. Teoremas Integrales: Stokes y Gauss (Divergencia)

Teorema de Stokes

En cada uno de los siguientes ejercicios, verifica el teorema de Stokes con sus dos partes: la integral de línea y la de superficie, comprueba que ambos cálculos llevan al mismo resultado.

1. $\vec{F}(x,y,z) = (2x - y)\hat{\imath} - yz^2\hat{\jmath} - y^2z\hat{k}$, S es el hemisferio norte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ & C su contorno limitante.

2. $\vec{F}(x,y,z) = (y - z + 2)\hat{\imath} + (yz + 4)\hat{\jmath} - xz\hat{k}$, S es la superficie del cubo $x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 2, z = 2$ por encima del plano *xy*.

3. $\vec{F}(x,y,z) = xz\hat{\imath} - y\hat{\jmath} + x^2y\,\hat{k}$, S es la superficie de la región limitada por $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ & $2x + y + 2z = 8$.

4. Para $\vec{F}(x,y,z) = (x^2 + y - 4)\hat{\imath} + 3xy\hat{\jmath} + (2xz + z^2)\,\hat{k}$, calcula $\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right).d\vec{S}$, donde S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ encima del plano *xy*.

5. Para $\vec{F}(x,y,z) = (x^2 + y - 4)\hat{\imath} + 3xy\hat{\jmath} + (2xz + z^2)\,\hat{k}$, calcula $\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right).d\vec{S}$, donde S es el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ encima del plano *xy*.

6. Si $\vec{F}(x,y,z) = 2yz\hat{\imath} - (x + 3y - 2)\hat{\jmath} + (x^2 + z)\,\hat{k}$, calcula $\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right).d\vec{S}$, donde S es la superficie de intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ & $x^2 + z^2 = a^2$ situada en el primer octante.

Teorema de Gauss o Divergencia

7. Valida el teorema de Gauss: calcula $\iint_S \vec{F}.d\vec{S}$ directamente y mediante el teorema de divergencia de Gauss; donde $\vec{F}(x,y,z) = (4xz, -y^2, yz)$ y S es la superficie del cubo limitado por $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$.

8. Valida el teorema de Gauss: calcula $\iint_S \vec{F}.d\vec{S}$ directamente y mediante el teorema de divergencia de Gauss; donde $\vec{F}(x,y,z) = (4x, -2y^2, z^2)$ y S es la superficie limitada por $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ & $z = 3$.

9. Sea $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, S una superficie cerrada y V el volumen encerrado por la superficie S. Calcula $\iint_S \vec{r}.d\vec{S}$.

10. Calcula $\iint_S \vec{r}.d\vec{S}$ para las superficies S dadas por:

   a) La esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
   b) El cubo limitado por $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$.

11. Hallar $\iint_S \vec{F}.d\vec{S}$, donde $\vec{F}(x, y, z) = 2xy\hat{\imath} + yz^2\hat{\jmath} + xz\hat{k}$ y S es la superficie del paralelepípedo limitado por $x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 1, z = 3$.

12. Hallar $\iint_S \vec{F}.d\vec{S}$, donde $\vec{F}(x, y, z) = 2xy\hat{\imath} + yz^2\hat{\jmath} + xz\hat{k}$ y S es la superficie del paralelepípedo limitado por $x = 0, y = 0, y = 3, z = 0$ & $x + 2z = 6$.

13. Comprobar el teorema de Gauss para $\vec{F}(x, y, z) = 2x^2y\hat{\imath} - y^2\hat{\jmath} + 4xz^2\hat{k}$ si S es la superficie extendida del primer octante limitada por $y^2 + z^2 = 9; x = 2$.

14. Calcula $\iint_S \vec{r}.d\vec{S}$ si S es:

   a) La esfera de radio 2 con centro en $(0,0,0)$.
   b) La superficie del cubo limitado por $x = -1, y = -1, z = -1, x = 1, y = 1$ & $z = 1$.
   c) La superficie limitada por el paraboloide $z = 4 - (x^2 + y^2)$ y el plano xy.

15. Si S es una superficie cerrada que encierra un volumen V & $\vec{F}(x, y, z) = ax\hat{\imath} + by\hat{\jmath} + cz\hat{k}$, calcula $\iint_S \vec{F}.d\vec{S}$.

RESPUESTAS:

1. Valor común π.

2. Valor común -4.

3. Valor común 32/3.

4. -16π

5. -4π

6. $-\frac{a^2}{12}(3\pi + 8a)$

7. Valor común $\frac{3}{2}$.

8. Valor común 84π

9. $3V$

10. a) $4\pi a^3$

    b) 3

11. 30

12. $351/12$

13. Valor común igual a 180.

14. a) 32π
    b) 24
    c) 24π

15. $(a + b + c)V$