Tarea 7. DERIVADA DIRECCIONAL, REGLA DE LA CADENA Y EL VECTOR GRADIENTE

1. Sea **u** un vector fijo **unitario** cualquiera, definimos g por $g(t) = f(P_0 + t\boldsymbol{u})$, donde t es real & f es una función de varias variables. A partir del cálculo de $g'(0)$, determina la derivada direccional requerida $D_{\boldsymbol{u}} f(P_0)$ en cada caso.

   a) $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}$ (producto punto del vector constante $\boldsymbol{a}$ y el vector variable $\boldsymbol{x}$; ambos en tres dimensiones).

   b) $f(x) = \left\| x \right\|^4$ (módulo a la cuarta del vector $\boldsymbol{x}$, el vector puede está en $\vec{x} \varepsilon\ \mathbb{R}^n$.

2. Calcula las derivadas direccionales de las siguientes funciones en los puntos y direcciones que se indican:

   a) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ en (1,1,0) en la dirección de **i** - **j** +2**k**.

   b) $f(x, y, z) = (x/y)^z$ en $(1,1,1)$ en la dirección de $(2,1,-1)$.

3. La siguiente tabla contiene información de los valores (en negritas) de la función f.

x \y	*0.7*	*0.8*	*0.9*
472.5	**28**	**26**	**23**
486.4	**30**	**29**	**26**
523.6	**35**	**31**	**29**

   a) Determina la tasa de cambio de la función en $(486.4, 0.7)$ si la variable x aumenta un 2% y la variable y aumenta un 3%.
   b) Determina la máxima razón de cambio en $(486.4, 0.7)$ y la dirección en la que se logra.
   c) Determina la mínima razón de cambio en $(486.4, 0.7)$ y la dirección en la que se logra.

4. Una función f tiene en el punto (1,2) las derivadas direccionales, 2 en la dirección de (2,2) & - 2 en dirección de (0,1). Determina el vector gradiente en (1,2) y calcula la derivada direccional en dirección al punto (4,6).

5. Hallar los valores de las constantes a, b & c tales que la derivada direccional de $f(x, y, z) = a x y^2 + b y z + c z^2 x^3$ en el punto (1,2,-1) tenga el valor máximo 64 en la dirección paralela al eje z.

6. Se sabe que $D_{\mathbf{u}} f(a) = 1$ & $D_{\mathbf{v}} f(a) = 2$, donde **u** y **v** son vectores unitarios en la dirección de 2**i** + 3**j** e **i** - **j** , respectivamente. Calcula $\nabla f(\mathbf{a})$.

7. Si $w = x y \cos z$, $x = t$, $y = t^2$ & $z = \arccos t$. **Usa la regla de la cadena** para calcular la derivada $\frac{\partial w}{\partial t}$.

8. Encuentra $\partial w / \partial t$ usando apropiadamente la regla de la cadena, evalúa cada derivada parcial en los valores indicados de s & t.

$$w = y^3 - 3x^2 y \; ; x = e^s \; ; y = e^t \; ; s = 0 \; ; t = 1$$

9. Considera la función $w = f(x, y)$ donde $x = r\cos\theta$ & $y = r\,\text{sen}\,\theta$ (coordenadas polares). Determina si cada una de las siguientes ecuaciones es verdadera o falsa.

a) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial w}{\partial r}\cos\theta - \dfrac{\partial w}{\partial \theta}\left(\dfrac{\text{sen}\,\theta}{r}\right)$; $\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial w}{\partial r}\text{sen}\,\theta + \dfrac{\partial w}{\partial \theta}\left(\dfrac{\cos\theta}{r}\right)$

b) $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r^2}\right)\left(\dfrac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$

10. **Ecuaciones de Cauchy-Riemann**. Dadas las funciones $u(x, t)$ & $v(x, t)$, verifica que las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \;\&\; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Pueden escribirse en coordenadas polares como:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial v}{\partial \theta} \;\&\; \frac{\partial v}{\partial r} = -\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

11. La ecuación de onda unidimensional se expresa por medio de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Muestra que $u(x, t) = \dfrac{1}{2}[f(x - ct) + f(x + ct)]$ es una solución de la ecuación de onda .

RESPUESTA:

1. a) $D_{\hat{u}} f(\overrightarrow{P_0}) = \vec{a}.\hat{u}$; b) $D_{\hat{u}} f(\overrightarrow{P_0}) = 4\|\overrightarrow{P_0}\|^2 (\overrightarrow{P_0}.\hat{u})$.

2. a) $D_{\hat{u}} f(1,1,0) = -0.816497$; b) $D_{\hat{u}} f(1,1,0) = 0.408248$.

3. a) $D_{\hat{u}} f(\overrightarrow{P_0}) = 0.12136$; b) $\|\nabla f(486.4, 0.7)\| = 10.0009$; $\hat{u} = (0.01437, -0.999)$;

   c) $-\|\nabla f(486.4, 0.7)\| = -10.0009$; $\hat{u} = (-0.01437, 0.999)$

4. $\nabla f(1, 2) = (4.828427, -2)$; $D_{\hat{u}} f(1, 2) = 1.014229$

5. $a = 8.25, b = 33, c = -11.$

6. $\nabla f(\vec{a}) = (2.418166,\ -0.41026)$

7. $\frac{\partial w}{\partial t} = y\cos z + 2\,x\,t\cos z + \frac{x\,y\,sen\,z}{\sqrt{1-t^2}}$

8. $\frac{\partial w}{\partial t} = (3e^2 - 3)\mathrm{e}$

9. a) La primera identidad es falsa. La segunda es verdadera. b) Es verdadera.

10. No hay respuesta, ésta viene en el enunciado del problema.

11. Sugerencia. Aplica la regla de la cadena con $r = x - c\,t$ & $s = x + c\,t$.