Tarea 8. PLANOS Y DIFERENCIAL

1. Supón que $z = f(x, y)$ es una función lineal de x & y con pendiente 2 en la dirección x y pendiente 3 en la dirección y.
   a) Un cambio de 0.5 en x & - 0.2 en y, ¿qué cambio produce en z?
   b) Si $z = 2$ cuando x =5 & y = 7, ¿cuál es el valor de z cuando x = 4.9 & y = 7.2?

2. Encuentra la ecuación del plano que pasa por los puntos (4,0,0), (0,9,0) & (0,0,2).

3. Con la siguiente tabla, encuentra una expresión para la función lineal.

x \ y	-1	0	1	2
0	1.5	1	0.5	0
1	3.5	3	2.5	2
2	5.5	5	4.5	4
3	7.5	7	6.5	6

4. La oficina de inscripciones de la Universidad Texas A&M utiliza la siguiente ecuación lineal para pronosticar el promedio de calificaciones de un estudiante de nuevo ingreso:

$$z = 0.003x + 0.8y - 4$$

   Donde z es el promedio de calificación pronosticado (GPA, por sus siglas en inglés) en una escala de 0 a 4.3, x la suma de las pruebas de aptitud escolar (SAT, por sus siglas en inglés) en matemáticas y expresión verbal, en una escala de 400 a 1600, & y es el GPA de preparatoria del estudiante, en una escala de 0 a 4.3. La Universidad admite estudiantes cuyo GPA pronosticado sea por lo menos de 2.3.
   a) ¿Será admitido un estudiante con SAT de 1050 y GPA de 3.0?
   b) ¿Será admitido todo estudiante con SAT de 1600?
   c) ¿Será admitido todo estudiante con GPA de 4.3?
   d) ¿Qué es más importante, otros 100 puntos en el SAT u otro 0.5 en el GPA de preparatoria?

5. a) Encuentra un vector $\boldsymbol{V}$ normal a la superficie

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2)^{3/2}$$

   en el punto (1,0,2) de la superficie.
   b) Encuentra el coseno del ángulo formado entre el vector $\boldsymbol{V}$ y el eje z.

6. Encuentra la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie $xyz = a^3$ en un punto cualquiera (x_0, y_0, z_0). Calcula el volumen del tetraedro limitado por ese plano y los tres planos cartesianos.
   (**Sugerencia**. El volumen está dado por $V = B\,h\,/\,3$)

7. Encuentra todos los puntos de la superficie $z = sen(x + y) + senx + seny$; $0 \le x \le 2\pi$; $0 \le y \le 2\pi$, donde el plano tangente sea horizontal.

8. Encuentra el punto de la superficie $z = 2x^2 + 3y^2$ donde el plano tangente sea paralelo al plano $8x - 3y - z = 0$.

9. Encuentra la ecuación del plano tangente al elipsoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en (x_0, y_0, z_0).

10. Se construye un cono de altura $h = 6$ y radio $r = 3$, cometiéndose errores Δr & Δh en su radio y altura, respectivamente. Completa la tabla que te damos abajo para mostrar la relación entre ΔV & dV para dichos errores (el volumen del cono es $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$).

Δr	Δh	dV	ΔV	$\Delta V - dV$
0.1	0.1			
0.1	-0.1			
0.001	0.002			
-0.001	0.002			

11. El volumen del cilindro es $V = \pi r^2 h$. Si $r = 3$ & $h = 5$ centímetros con un posible error máximo de 0.04 y de 0.02 centímetros, respectivamente, aproxima el error máximo posible al medir el volumen.

12. Los valores de tres resistencias R_1, R_2 & R_3 conectadas en paralelo son 100, 200 & 400 Ω respectivamente, con un error máximo de $0.01\,\Omega$ en las mediciones. Estima el error máximo en el cálculo de la resistencia equivalente del circuito.

13. Le pedí a un estudiante que encontrara la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^3 - y^2$ en el punto $(x, y) = (2, 3)$. Su respuesta fue:

$$z = 3x^2(x - 2) - 2y(y - 3) - 1$$

    a) A primera vista, ¿cómo saber que está equivocado?
    b) ¿Qué error cometió el estudiante?
    c) Contesta correctamente la pregunta.

14. a) Encuentra la **linealización local** de la función $f(x, y) = x^2y$ en el punto (3,1).
    b) Utiliza esta aproximación para estimar el valor de la función en (2.9, 1.1).

15. Una placa calentada de manera irregular tiene temperatura $T(x, y)$ en grados centígrados en el punto (x, y). Si $T(2,1) = 135$, $T_x(2,1) = 16$, & $T_y(2,1) = -15$, calcula la temperatura en el punto (2.04, 0.97).

16. Un péndulo de periodo T y longitud l se utilizó para determinar g a partir de las fórmulas

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \text{ y } l = s + \frac{k^2}{s}, k < s$$

a) Si las mediciones de k & s son precisas (k & s son constantes que tienen que ver con el péndulo), con variación no mayor de 1% del valor de k & s, (esto significa, por ejemplo, que $|dk| \leq 0.01k$) respectivamente, encuentra el máximo porcentaje de error en l.
b) Si la medición de T no varía en más de 0.5% del valor de T, encuentra, usando (a), el máximo porcentaje de error en el valor de g.

RESPUESTAS

1. a) $\Delta z = 0.4$; b) $z = 2.4$.

2. $z = 2 - 0.5x - \left(\frac{2}{9}\right) y$.

3. $z = 1 + 2x - 0.5y$.

4. a) No es admitido.

   b) No, necesitaría además que $y \geq 1.875$.

   c) No, se necesitaría además que $x \geq 953.3$

   d) Es más importante otro 0.5 en el GPA de preparatoria.

5. a) $(4,0,-1)$; b) $-\frac{1}{\sqrt{17}}$

6. $V = \frac{9\,a^3}{2}$

7. $P_1 = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$; $P_2 = \left(\frac{5\,\pi}{3}, \frac{5\,\pi}{3}\right)$; $P_3 = (\pi, \pi)$.

8. $(2, -0.5, 8.75)$

9. $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$

10. Para llenar la tabla más fácil, muestra que $dV = A\Delta r + B\Delta h$ & $\Delta V = C(3 + \Delta r)^2(6 + \Delta h) - D$. ¿Cuáles son los valores de A, B, C, D?

11. $4.335393\ cm^3$

12. $0.571429\ \Omega$

13. a) Las variables deben tener exponente 1. c) $12x - 6y - z = 7$.

14. a) $L(x, y) = 6x + 9y - 18$; b) $f(2.9,1.1) \approx L(2.9,1.1) = 9.3$

15. $T(2.04,0.97) \approx 136.09$

16. a) El error máximo no excede el 1% del valor de l.

b) El error máximo esperado no excede el 2% del valor exacto de g.