Tarea 9. TEOREMA DE TAYLOR Y EXTREMOS

1. Encuentra el polinomio de Taylor de grado 2 alrededor del origen para la función.

$$f(x,y) = e^{\,2\,x\,+\,3\,y}$$

2. Considera la función dada por $u = f(x, y, z) = sen\ x + sen\ y + sen\ z - sen\ (x + y + z)$, encuentra su desarrollo de Taylor de grado 2 cerca de $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Sea $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$. Obtén el desarrollo de Taylor de grado 2 alrededor de (0,0).

4. Si $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = e^{x_1\,+\,x_2 + \cdots +\,x_n}$, halla su desarrollo de Taylor de grado 2 alrededor de $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

5. Usando un desarrollo de Taylor apropiado, expresa el polinomio:

$$f(x,y) = xy + x^2 + y^2$$

Como un polinomio en potencias de $x - 1$ & $y + 1$.

6. Desarrolla un polinomio de Taylor de grado 3 alrededor del origen de la función:

$$f(x,y) = e^{\,x\,y}\, sen(x + y)$$

No lo hagas a través de la matriz Hessiana sino por medio de los desarrollos de Maclaurin de las funciones exponencial y seno.

7. Encuentra y analiza los puntos críticos de $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5$ (Observa el comportamiento de f cerca de (1,2)).

$y \setminus x$	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
1.8	0.08	0.05	0.04	0.05	0.08
1.9	0.05	0.02	0.01	0.02	0.05
2.0	0.04	0.01	0.00	0.01	0.04
2.1	0.05	0.02	0.01	0.02	0.05
2.2	0.08	0.05	0.04	0.05	0.08

8. Sea $f(x,y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$. Encuentra sus puntos críticos y analízalos.

9. Encuentra los extremos relativos y puntos silla de:

$$f(x,y) = 3x^3 + 5y^3 - 225x - 15y + 8$$

10. Encuentra los extremos relativos y puntos silla de:

$$f(x, y) = sen\,(x + y) + sen\,x + sen\,y \quad \text{para} \quad 0 \le x \le 2\pi\,; 0 \le y \le 2\pi\,.$$

11. Encuentra los extremos relativos y puntos silla de: $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x\,y$.

12. Comprueba que el punto $\left(-1, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ es punto crítico de la función

$$f(x, y, z) = x\,sen\,z + z\,sen\,y$$

Analízalo.

13. Encuentra los extremos relativos y puntos silla de la función:

$$f(x, y, z, u) = x + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{u}{z} + \frac{1}{u}\,.$$

14. Determina las dimensiones de la caja de volumen máximo y aristas paralelas a los ejes que puede inscribirse en la elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

15. Determina las dimensiones de la caja rectangular con máximo volumen si el área superficial total está dada por 64 centímetros cuadrados.

16. Encuentra los puntos de la superficie $x^2 y^2 z = 1$ que sean más cercanos al origen.

RESPUESTAS

1. $Q(x, y) = 1 + 2x + 3y + 2x^2 + 6xy + \frac{9}{2}x^2$

2. $$Q(x, y, z) = 4 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\left(y - \frac{\pi}{2}\right) - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\left(z - \frac{\pi}{2}\right) - \left(y - \frac{\pi}{2}\right)\left(z - \frac{\pi}{2}\right) - \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

3. $Q(x, y) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$

4. $Q(x_1, \ldots, x_n) = 1 + x_1 + \cdots + x_n + \frac{1}{2}(x_1 + \cdots + x_n)^2$

5. $Q(x, y) = 1 + (x - 1) - (y + 1) + \frac{1}{2}\left[2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+1) + 2(y+1)^2\right]$

6. $P_3(x,y) = x + y - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2 y + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{6}y^3$

7. Al observar la tabla, concluimos que f debe tener un mínimo relativo en (1, 2). Por el criterio de la segunda derivada se ve que, en efecto, f tiene un mínimo relativo en este punto.

8. f tiene un punto silla en (1, 1).

9. f tiene un mínimo relativo en (5,1); puntos silla en (5, -1) y (-5,1); máximo relativo en (-5,-1).

10. f tiene un mínimo relativo en $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, un máximo en $\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$, el criterio no aplica en (π, π).

11. g tiene un mínimo relativo en (0, 0, 0).

12. Primero: el criterio, no aplica. Ahora, usando el correspondiente desarrollo de Taylor:

$$f(x,y,z) \approx (x+1)z$$

Como $(x+1)z$ toma valores positivos y negativos toma valores positivos y negativos en la cercanía del punto $(-1, \pi/2, 0)$, concluimos que la función no tiene un extremo relativo en $(-1, \pi/2, 0)$; luego, este punto es un punto silla.

13. f tiene un mínimo relativo en el único punto crítico (1, 1, 1, 1).

14. $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}$, $z = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Volumen máximo $V = \frac{64}{\sqrt{3}}$.

15. $x = y = z = \frac{8}{\sqrt{6}}$

16. $\left(\pm 2^{1/10}, \pm 2^{1/10}, 2^{-2/5}\right)$