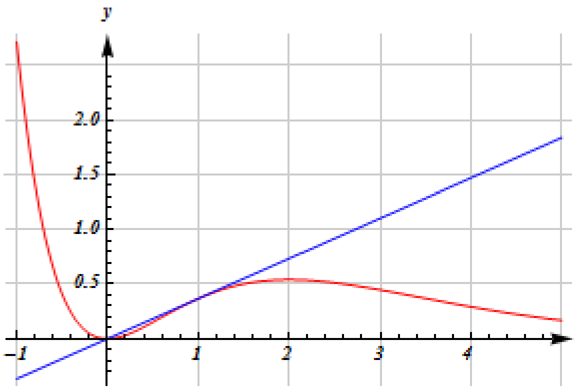
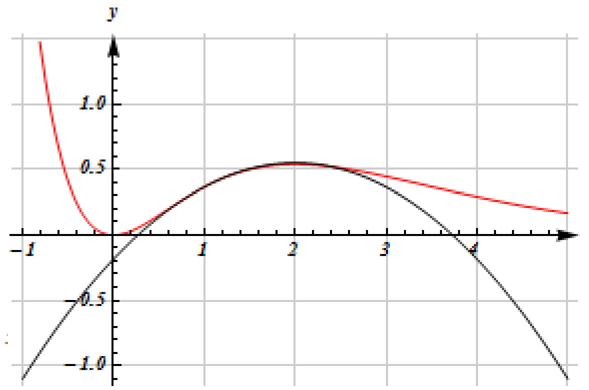
TEOREMA DE TAYLOR y EXTREMOS SIN RESTRICCIONES

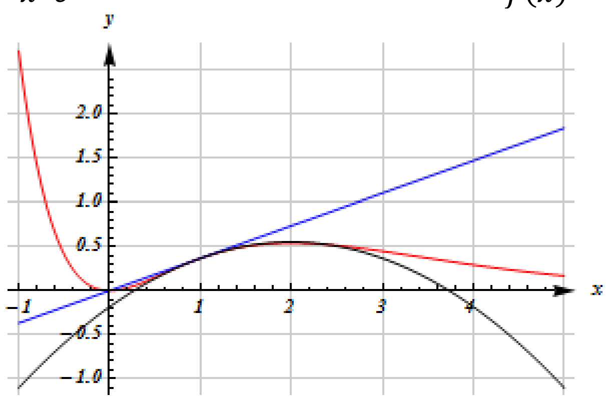
Para una función de una variable puede construirse una mejor aproximación mediante una función cuadrática que mediante una función lineal, para las funciones de varias variables ocurre una situación similar.



Aproximación lineal de la función $f(x) = x^2e^{-x}$



Aproximación cuadrática de la función $f(x) = x^2e^{-x}$



Vista simultánea de ambas aproximaciones

Ya logramos una primera aproximación a la función $z = f(x, y)$ por medio de su **linealización local, es decir, de la función con superficie la del plano tangente**. Ahora veremos cómo mejorar esta aproximación mediante una función cuadrática.

A. APROXIMACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS CERCA DE UN PUNTO

Para una función de una variable, la propiedad de ser localmente lineal indica que la mejor aproximación lineal es el **polinomio de Taylor de grado 1.**

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

Para x cerca de a.

Una mejor aproximación de $f(x)$ está dada por el **polinomio de Taylor de grado 2.**

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

Para x cerca de ***a*.**

Análogamente, para una función de dos variables, la linealización local para $f(x, y)$ cerca de (a, b) es:

$$L(x, y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Ahora, se obtiene una mejor aproximación de f si se usa **un polinomio cuadrático** $Q(x, y)$ con **las mismas derivadas parciales que la función original** f.

Actividad 1. En búsqueda de la aproximación cuadrática.

El polinomio de Taylor de grado 2 para aproximar $f(x, y)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b) puede escribirse como sigue para ciertos valores de A, B y C. **Hallen estos valores y reescriban el polinomio de Taylor con los valores encontrados**.

Polinomio de Taylor de grado 2 para aproximar *f (x, y)* cuando *(x, y)* está cerca de *(a, b)*

Si f tiene derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces

$$\begin{aligned} & f(x, y) \approx Q(x, y) \\ & = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \\ & + A(x-a)^2 + B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2 \end{aligned}$$

Actividad 2. La forma matricial del teorema de Taylor

Existe la posibilidad de escribir el resultado anterior en otra forma que resulta más sencilla de recordar y que al mismo tiempo es susceptible de generalización. Llamamos **MATRIZ HESSIANA**, a la matriz cuadrada dada por:

$$H(a,b) = \left[f_{ij}(a,b) \right] = \begin{bmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{bmatrix}$$

Escriban la matriz Hessiana a partir de lo que hallaron en la Actividad 1. **Comprueben con esta notación** que el polinomio de Taylor de grado 2 puede escribirse como:

$$f(x,y) \approx f(a,b) + \nabla f(a,b).(x-a, y-b) + \frac{1}{2}(x-a, y-b)H(a,b)\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

B. EXTREMOS RELATIVOS (SIN RESTRICCIONES)

Las funciones de varias variables, igual que las funciones de una variable, pueden tener extremos relativos y absolutos. Una función tiene un **extremo relativo** en un punto donde toma los **valores máximos o mínimos en una pequeña región alrededor del punto**. Los **extremos absolutos** son los **valores máximos y mínimos considerando todo el dominio de la función**. Más precisamente, considerando sólo puntos en los que *f* está definida, se dice que:

Definición (de extremos relativos):

a) f tiene un **máximo relativo** en el punto P_0 si $f(P_0) \geq f(P)$ **para todos** los puntos P "**cerca**" de P_0.

b) f tiene un **mínimo relativo** en el punto P_0 si $f(P_0) \leq f(P)$ **para todos** los puntos P "**cerca**" de P_0 **.**

¿Cómo se detecta un extremo relativo?

En el cálculo de una variable, la búsqueda de un extremo relativo se realiza entre los **puntos críticos**. Éstos son aquellos puntos donde la recta tangente es horizontal o donde la derivada no existe. Como extensión de recta tangente, tenemos ahora el concepto de plano tangente, entonces, ¿qué extensión debería tener la idea de recta tangente horizontal? Un poco de detenimiento nos indicará que se trataría ahora de un plano paralelo al plano xy. Evidentemente un plano como éste debe satisfacer en el punto P_0 que $\nabla f(P_0) = 0$. De esta forma, tenemos:

Definición de Punto Crítico: Decimos que el punto P_0 en el dominio de f (y no en la frontera del dominio considerado) es un **punto crítico** de la función f si:

- ✓ $\nabla f(P_0) = 0$, o bien si:
- ✓ Alguna derivada parcial de primer orden de f no existe.

Encontraremos, como era el caso de funciones de una variable, que existen puntos críticos en los cuales no hay ni máximo ni mínimo. Entre estos puntos hallamos para funciones de una variable independiente los puntos de inflexión. **Hay puntos para los cuales el valor de una función es mayor en algunas direcciones y menor en otras.** En estos puntos, por lo tanto, no hay extremo para la función *f*. Tenemos la siguiente definición

Definición de punto silla: Una función f tiene un **punto silla** (de montar) en P_0 si P_0 es un punto crítico de f y dentro de cualquier vecindad de P_0, no importa lo pequeña que sea, hay puntos, P_1 y P_2, con

$$f(P_1) > f(P_0) \ \ \& \ \ f(P_2) < f(P_0)$$

Claramente en un punto silla, f no tiene máximo ni mínimo.

Una vez encontrados los puntos críticos de una función, requerimos de algún criterio que nos permita clasificarlos. En el curso de una variable contamos con los criterios de la primera y la segunda derivada, es nuestro trabajo ahora formular un criterio que nos permita esta clasificación. La idea en el fondo es sencilla:

Cerca de un punto crítico, una función tiene el mismo comportamiento que su aproximación cuadrática de Taylor alrededor de ese punto.

Otra alternativa es investigar **cómo son las curvas de nivel en la cercanía de los puntos críticos**, y una última se apoya en aspectos analíticos por medio de un criterio conocido como **criterio de la 2° derivada**.

En cada uno de los siguientes casos se les pide que determinen el comportamiento que tiene la función en el (los) punto (s) punto crítico(s) indicado(s).

Actividad 3. Enfoque con Mathematica

a) Determinen los puntos críticos de la función $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$.

b) Utilicen el siguiente comando de MATHEMATICA para obtener la gráfica de la función:

```
campanagauss
        = ParametricPlot3D[{r * Cos[t], r
        * Sin[t], Exp[-r^2]}, {r, 0,2}, {t, 0,2 * Pi}, PlotRange
        → {{-2,2}, {-2,2}, {-0.1,1.2}}]
```

c) Calculen el desarrollo de Maclaurin (es Taylor en $(0,0)$) de 2° grado de la función.

d) Determinen con MATHEMATICA el desarrollo de Maclaurin de 2° grado y comparen con el inciso anterior. Usen:

```
Q[x_, y_] = Normal[Series[Exp[-x^2 - y^2], {x, 0,2}, {y, 0,2}]]
```

e) Grafiquen la función obtenida en el inciso anterior. ¿Qué observan en la vecindad del punto crítico hallado

```
graficacuadratica = Plot3D[Q[x, y], {x, -1,1}, {y, -2,2}]
```

f) Obtengan una gráfica simultánea de la función y su aproximación cuadrática, interpreten y concluyan:

$$\text{Show[campanagauss, graficacuadratica]}$$

g) Refuercen su conclusión con el mapa de contorno tanto de la función como de la aproximación cuadrática. Describan concisamente pero con detalle lo que observen.

h) Para cada una de las siguientes funciones repitan los incisos a)-g). ¿Qué ocurre con los puntos críticos de cada una de las siguientes funciones?, clasifíquenlos:

a) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

b) $f(x,y) = y^2 - x^2$

II. Enfoque analítico: aspectos algebraicos de las funciones cuadráticas de la forma:

$$f(x, y) = a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2$$

Criterio de la segunda derivada:

En general, una función de la forma $f(x, y) = a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2$ tiene un punto crítico en (0,0). Para analizar el comportamiento de la función en este punto crítico, completamos el cuadrado. Si suponemos que $a \neq 0$, escribimos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &= a[x^2 + \frac{b}{a}xy + \frac{c}{a}y^2] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)y^2\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)y^2\right] \end{aligned}$$

La forma de la gráfica de f depende de si el coeficiente de y^2 es positivo, negativo o cero. El signo de $D = 4\,a\,c - b^2$, llamado **discriminante**, determina el signo del coeficiente de y^2.

Actividad 4. Enfoque geométrico para extremos relativos

a) Grafiquen las funciones de la forma:

$$f(x,y) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)y^2\right]$$

Para los valores:

i) $a = 2, b = 1, c = 1$
ii) $a = -2, b = 1, c = 1$
iii) $a = -2, b = 1, c = -1$

b) Grafiquen los mapas de contorno en cada caso. ¿Qué deducen en relación al discriminante y al valor de "*a*" ?

c) Completen los espacios marcados con **???** en los siguientes enunciados:

Caso 1. Si $D > 0$, entonces la función tiene un **???** o un **???**

- Si $a > 0$, la función tiene un **???**, porque la gráfica es un ??? que abre hacia ???.
- Si $a < 0$, la función tiene un **???**, porque la gráfica es un ??? que abre hacia ???.

Caso 2. Si $D < 0$, entonces la función crece en algunas direcciones y decrece en otras. En este caso se tiene un **???** (Por ejemplo, $z = x^2 - y^2$).

Caso 3. Si $D = 0$, entonces puede mostrarse con ejemplos que el criterio no es aplicable. En estos casos será necesario considerar, por ejemplo, la gráfica, las curvas de nivel o el polinomio de Taylor correspondiente para determinar la naturaleza del punto crítico.

Actividad 5. Enfoque analítico para extremos relativos. Criterio de la segunda derivada

Supongamos ahora que f es cualquier función con $f(0,0) = 0$ (si éste no es el caso, la gráfica sólo sube o baja) y que $\nabla f(0,0) = (0,0)$ (estamos en la consideración de un punto crítico). Hemos visto que f se puede aproximar por su polinomio cuadrático de Taylor cerca de (0,0):

$$f(x,y) \approx f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2} f_{xx}(0,0)x^2 + f_{xy}(0,0)xy + \frac{1}{2} f_{yy}(0,0)y^2$$

Como $f(0,0) = 0$ & $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, el polinomio cuadrático se simplifica en:

$$f(x,y) = \frac{1}{2} f_{xx}(0,0)x^2 + f_{xy}(0,0)xy + \frac{1}{2} f_{yy}(0,0)y^2$$

a) Adapten el cálculo del discriminante con la expresión anterior:

b) Si sólo adaptamos al caso en el cual el punto crítico es (a, b), obtenemos el siguiente criterio en el que se les pido completar los espacios marcados con **???**:

Criterio de la segunda derivada para funciones de dos variables

Supongamos que (a,b) es un punto donde $\nabla f(a,b) = (0,0)$. Sea

$D=$ ***???***

- ✓ Si $D>0$ & $f_{xx}(a,b)>0$, entonces f tiene un **???** en (a,b).
- ✓ Si $D>0$ & $f_{xx}(a,b)<0$, entonces f tiene un **???** en (a,b).
- ✓ *Si* $D<0$, entonces f tiene un **???** en (a,b)
- ✓ Si $D = 0$, cualquier cosa puede suceder: f puede tener un máximo relativo, o un mínimo relativo o un punto silla en (a,b). Se recomienda en estos casos analizar la gráfica o estudiar la aproximación cuadrática correspondiente.

c) Con base en el criterio anterior, establece un conjunto de comandos de Mathematica que permita calcular los extremos relativos de la función. Aplícalos en la función:

$$f(x,y) = 2\,y^{3} + x\,y^{2} + 5\,x^{2} + y^{2}$$

d) Todo lo anterior aplica en funciones de dos variables, sin embargo, ¿cómo generalizarlo a fin de no estar limitados a funciones de sólo dos variables independientes? La respuesta la encontramos en el enfoque matricial: la **matriz Hessiana**. Aunque no lo probaremos (pues requiere álgebra lineal), establecemos el siguiente resultado:

Condición suficiente para la existencia de extremos relativos basándose en la matriz Hessiana

Se supone que $w = f(x,y,z)$ satisface en el punto crítico $P_0=(a,b,c)$ la ecuación $\nabla f(P_0) = (0,0,0)$.
La matriz hessiana $H(P_0)$ es:

$$H(P_0) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} \text{ (evaluada en } P_0\text{)}$$

Ahora sea A_k la matriz formada por los elementos de la matriz $H(P_0)$ que están en el ángulo superior izquierdo, incluyendo k filas y k columnas de ella. Se define $\Delta_k = \det(A_k)$. Se tiene entonces que:

- ✓ Si todas las submatrices angulares de la matriz hessiana $H(P_0)$ tienen determinantes positivos, entonces la función ***f* tiene un mínimo relativo en P_0**.
- ✓ Si las submatrices angulares de la matriz hessiana $H(P_0)$ tienen determinantes de signo alternado (comenzando con un valor negativo, es decir $f_{xx}(P_0)<0$), entonces **la función tiene un máximo relativo en P_0.**
- ✓ Si Δ_k es diferente de cero (para todo k), y no sigue ninguno de los patrones enunciados anteriormente, **entonces *f* tiene un punto silla en P_0.**
- ✓ Si algún $\Delta_k = 0$, entonces no puede asegurarse nada.